НОУ ВПО "БАЛТИЙСКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ
И ФИНАНСОВ" (БИЭФ)

Г.Г. Арунянц

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Практикум

Калининград, 2009

УДК 330.4(076.5)
ББК 65в631я73
А79

А79 Арунянц Г.Г. Моделирование экономических процессов: практикум. – Калининград: Балтийский институт экономики и финансов, 2009. - 223 с.

Автор: Г.Г. Арунянц, доктор технических наук, профессор.

Рецензенты: И.Д. Рудинский, доктор педагогических наук, профессор; Л.И. Сергеев, доктор экономических наук, профессор, заслуженный экономист России.

Рассматриваются основы алгоритмического моделирования и процессы разработки ряда алгоритмических моделей экономических объектов. Приводятся сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для понимания этих моделей, а также оптимизационные методы и модели управления экономическими системами, линейное программирование, задания для самостоятельной работы по построению математических моделей и решению задач линейного программирования, в том числе с применением среды Excel. В соответствующих разделах приведены примеры решения конкретных задач моделирования. Особое внимание уделено формированию заданий для самостоятельных и курсовых работ. В приложениях к заданиям даны программы рассмотренных моделей на языках Visual Basic и Pascal.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности "Прикладная информатика в экономике" и других экономических специальностей, а также лиц, получающих второе высшее экономическое образование.

Печатается по решению Ученого совета БИЭФ, протокол №3 от 26 марта 2009 г.

ISBN 978-5-8002-0144-4

© БИЭФ, 2009.
© Арунянц Г.Г., 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение **4**

Глава 1. Модели и моделирование **7**
1.1. Понятие модели и моделирования. Классификация видов моделирования и моделей систем 7
1.2. Последовательность разработки математических моделей 15

Глава 2. Примеры составления математических моделей **18**

Глава 3. Статистическое моделирование экономических систем **23**
3.1. Теоретические основы метода 23
3.2. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло 32
3.3. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем 34

Глава 4. Методы и модели корреляционно-регрессионного анализа **41**
4.1. Общие сведения 41
4.2. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок 49
4.3. Этапы построения многофакторной корреляционной регрессионной модели 51

Глава 5. Линейное программирование в решении оптимизационных задач **59**
5.1. Задачи линейного программирования 59
5.2. Примеры построения экономико-математических моделей задач линейного программирования 62
5.3. Графические методы решения задач линейного программирования 70
5.4. Симплекс-метод 76
5.5. Задания для самостоятельной работы по построению математических моделей задач линейного программирования 79
5.6. Задания для самостоятельной работы по решению задач линейного программирования графическим методом 88
5.7. Задания для самостоятельной работы по решению задач линейного программирования симплекс-методом 90
5.8. Примеры решения задач линейного программирования на базе Excel 92

Глава 6. Самостоятельные и курсовые работы **115**
6.1. Основные требования 115
6.2. Примеры заданий на курсовые работы 117

Библиографический список **220**

Приложения **222**

Введение

Бурное развитие ЭВМ в последней четверти XX века стимулировало развитие новых теоретических и прикладных направлений. Ресурсы современной информационной технологии дают возможность решать математические задачи такой сложности, которые в недавнем прошлом казались нереализуемыми.

Появление быстродействующих ЭВМ с большим объемом оперативной памяти позволило перейти от приближенных аналитических методов к разработке алгоритмических, или имитационных, моделей, позволяющих описывать реальные процессы на уровне их понимания исследователем.

Одним из недостатков учебных планов экономических специальностей вузов представляется отсутствие в них изучения в достаточном объеме специализированных языков моделирования. В этих условиях универсальные и процедурно-ориентированные языки общего назначения (Visual Basic, Pascal, Delphi и др.) могут быть успешно использованы для выработки у студентов навыков решения задач моделирования типовых экономических процессов.

Преимуществом языков общего назначения является то, что их трансляторы включены в состав математического обеспечения всех современных компьютеров.

В данном практикуме рассматриваются основные методы и подходы к разработке и созданию алгоритмических моделей экономических систем.

Практикум предназначен для студентов экономических специальностей вузов, изучающих методы моделирования экономической и управленческой деятельности. Сегодня для разработки моделей сложных экономических систем часто используются современные пакеты прикладных программ типа GPSS, Pilgrim, Rethink и т.п., позволяющие создавать многоуровневые структурные (функциональные) модели исследуемых объектов в графических терминах. Однако для изучения упомянутых пакетов прикладных программ студентам требуется дополнительное учебное время, которым обычно современный вуз не располагает. В то же время для разработки и создания сравнительно простых моделей экономических систем вполне пригоден метод алгоритмического моделирования. Для его применения достаточно знания одного из универсальных языков программирования типа Pascal, Quick Basic или Visual Basic.

При составлении некоторых заданий на выполнение самостоятельных и курсовых работ (Глава 6) принималось во внимание известное положение [6] о том, что в разработке моделей экономических систем, как правило, участвуют два специалиста.

Первый из них – это предприниматель или менеджер, который заинтересован в создании математической модели некоторой еще не существующей экономической системы с целью получения максимально возможной прибыли. Он должен представлять, какие переменные являются независимыми (входными) и какие зависимыми (выходными), какие факторы влияют на процесс, протекающий в экономической системе, и какие из них являются в той или иной степени неопределенными (неизвестными). Предприниматель должен выбрать показатель, по которому он собирается оценивать эффективность будущей экономической системы, и критерий для выбора альтернативных вариантов ее структуры.

Второй разработчик – это специалист в области математического моделирования сложных систем (не обязательно экономических). Он должен, используя информацию, полученную от предпринимателя, составить формализованное описание алгоритмической модели, разработать алгоритм и программу, произвести отладку и испытания модели и совместно с предпринимателем провести машинный эксперимент с экономической моделью с целью установления оптимальных параметров системы, обеспечивающих максимум (или минимум) выбранного показателя эффективности.

Студент, обучающийся экономической специальности, в том числе "Прикладная информатика в экономике", должен приобрести навыки в качестве обоих упомянутых лиц. Это означает, что в процессе работы по созданию модели экономической системы он должен действовать то как предприниматель, то как специалист по моделированию, т.е. постоянно вести диалог сам с собой, становясь то в позицию предпринимателя, то в позицию разработчика модели. В связи с этим описание каждой алгоритмической модели, приводимой в части заданий, начинается с диалога между предпринимателем и консультантом. В результате диалога появляется концептуальная модель экономической системы. Таким путем предполагается облегчить четкое понимание читателями того, как вырабатывается исходная информация для алгоритмической модели.

Наряду со сведениями теоретического характера в практикуме разбирается большое количество примеров и задач, цель которых – уяснение основных понятий и математических методов. В конце большинства разделов пособия приводятся задачи для самостоятельного решения. Подборка этих задач проводилась из требования обеспечить эффективную проверку степени усвоения студентами изученного материала. Примеры и задачи предусматривают небольшой объем вычислений, но могут служить и в качестве исходных данных для разработки на их основе машинных алгоритмов решения поставленных задач. Преподаватели могут формировать с использованием приведенных заданий и примеров различные варианты новых заданий, в том числе

комбинированных, позволяющих проверять знания студентов в процессе выполнения ими практических заданий по курсу.

В целом этап изучения студентами этого курса завершают самостоятельные и курсовые работы (проекты) по дисциплине "Математическое моделирование экономических процессов". Основной целью выполнения курсовой работы (проекта) является получение и закрепление студентами практических навыков выполнения работ на одной из важнейших стадий создания систем управления – математического моделирования элементов экономических систем.

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного раздела можно получить из приведенных в специальных сносках и списке литературы источников.

Глава 1. Модели и моделирование

1.1. Понятие модели и моделирования. Классификация видов моделирования и моделей систем

При использовании метода моделирования свойства и поведение объекта изучают путем применения вспомогательной системы – модели, находящейся в определенном объективном соответствии с исследуемым объектом.

Представления о тех или иных свойствах объектов, их взаимосвязях формируются исследователем в виде описания этих объектов на обычном языке, в виде рисунков, графиков, формул или реализуются в виде макетов и других устройств. Подобные способы описания обобщаются в едином понятии – ***модель***, а построение и изучение моделей называется ***моделированием***.

Модель *– объект любой природы, который создается исследователем с целью получения новых знаний об объекте-оригинале и отражает только существенные (с точки зрения разработчика) свойства оригинала.*

Модель считается ***адекватной*** объекту-оригиналу, если она с достаточной степенью приближения на уровне понимания моделируемого процесса исследователем отражает закономерности процесса функционирования реальной системы во внешней среде.

Модели позволяют вынести упрощенное представление о системе и получить некоторые результаты намного проще, чем при изучении реального объекта. Более того, гипотетически модели объекта могут быть исследованы и изучены перед тем, как объект будет создан.

В практике исследования производственно-экономических объектов модели могут применяться для самых разных целей, что вызывает использование моделей различных классов. Построение одной-единственной математической модели для сложной производственной системы практически не представляется возможным без разработки вспомогательных моделей. Поэтому, как правило, при создании конечной математической модели исследуемого объекта строят частные вспомогательные модели, отражающие ту или иную информацию об объекте, имеющуюся у разработчика на данном этапе построения модели.

В основе моделирования лежит ***теория подобия***, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же. При моделировании абсолютное подобие не имеет места, и стремятся к тому, чтобы модель достаточно хорошо отображала исследуемую сторону функционирования объекта.

Классификационные признаки. В качестве одного из первых признаков классификации видов моделирования можно выбрать степень полноты модели и разделить модели в соответствии с этим признаком на полные, неполные и приближенные. В основе полного моделирования лежит полное подобие, которое проявляется как во времени, так и в пространстве. Для неполного моделирования характерно неполное подобие модели изучаемому объекту. В основе приближенного моделирования лежит приближенное подобие, при котором некоторые стороны функционирования реального объекта не моделируются совсем. Классификация видов моделирования систем ***S*** приведена на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Классификация видов моделирования систем

В зависимости от характера изучаемых процессов в системе ***S*** все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные. ***Детерминированное моделирование*** отображает детерминированные процессы, т.е. процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий; ***стохастическое моделирование*** отображает вероятностные процессы и

события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики, т.е. набор однородных реализаций. ***Статическое моделирование*** служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени, а ***динамическое моделирование*** отражает поведение объекта во времени. ***Дискретное моделирование*** служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно непрерывное моделирование позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а ***дискретно-непрерывное моделирование*** используется для тех случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

В зависимости от формы представления объекта (системы ***S***) можно выделить ***мысленное*** и ***реальное моделирование***.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания.

При ***наглядном моделировании*** на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков и символов.

Под ***математическим моделированием*** будем понимать процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи. Любая математическая модель, как и всякая другая, описывает реальный объект лишь с некоторой степенью приближения к действительности. Математическое моделирование для исследования характеристик процесса функционирования систем можно разделить на ***аналитическое***, ***имитационное*** и ***комбинированное***.

Для ***аналитического*** моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегро-дифференциальных, конечно-разностных и т.п.) или логических условий. ***Аналитическая модель*** может быть исследована следующими методами: а) ***аналитическим***, когда стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик; б) ***численным***, когда, не умея решать уравнения в общем виде, стремятся получить числовые результаты

при конкретных начальных данных; в) ***качественным***, когда, не имея решения в явном виде, можно найти некоторые свойства решения (например, оценить устойчивость решения).

Желая использовать аналитический метод, часто идут на существенное упрощение первоначальной модели, чтобы иметь возможность изучить хотя бы общие свойства системы. Аналитические методы бывают ***детерминированными*** и ***статистическими***. Численный метод проведения аналитических расчетов с помощью датчиков случайных чисел получил название ***метода статистических испытаний***, или ***метода Монте-Карло***.

При ***алгоритмическом моделировании*** описывается процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. ***Аналитические*** модели также могут быть детерминированными и статистическими. В последнем случае в модели с помощью датчиков случайных чисел имитируется действие неопределенных и случайных факторов. Такой метод моделирования получил название ***метода статистического моделирования***. В настоящее время этот метод считается наиболее эффективным методом исследования сложных систем, а часто и единственным практически доступным методом получения информации о поведении гипотетической системы на этапе ее проектирования.

Комбинированное моделирование позволяет объединить достоинства аналитического и алгоритмического моделирования. При построении комбинированных моделей производится предварительная декомпозиция процесса функционирования модели на составляющие подпроцессы. Для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных процессов строятся алгоритмические модели.

Насколько можно судить по литературным источникам, общепринятой классификации моделей экономических систем пока не существует. Однако представляется достаточно полезной классификация математических моделей экономических систем, приведенная в книге Т. Нейлора "Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем" (1971 г.) (рис. 1.2).

Экономико-математической моделью (ЭММ) называется выражение, состоящее из совокупности связанных между собой математическими зависимостями (формулами, уравнениями, неравенствами, логическими условиями величин – факторов, все или часть которых имеют экономический смысл). По своей роли в ЭММ эти факторы целесообразно подразделить на параметры и характеристики (рис. 1.3).

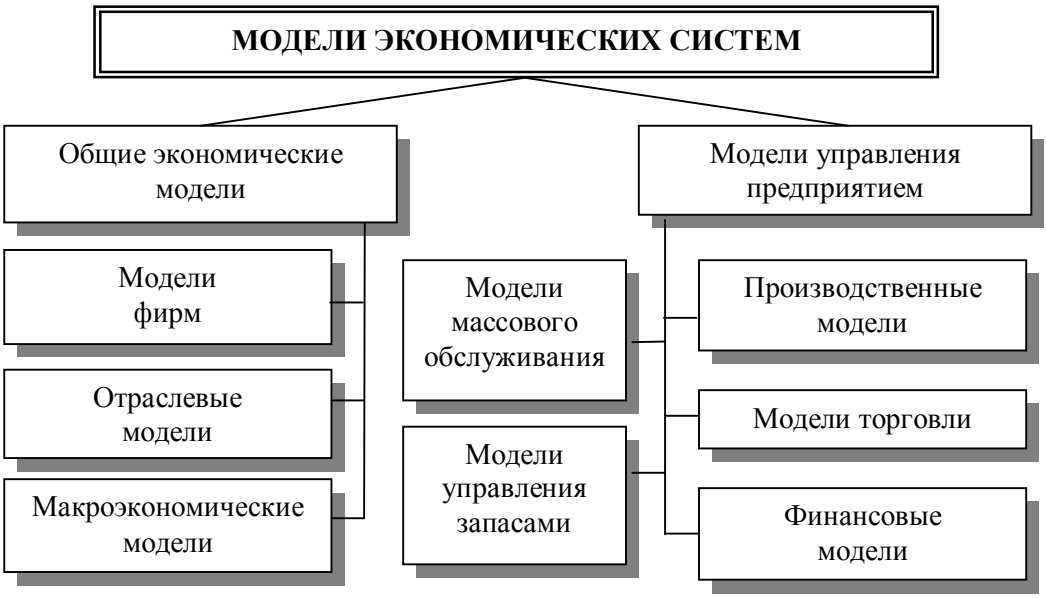


Рис. 1.2. Классификация экономических моделей

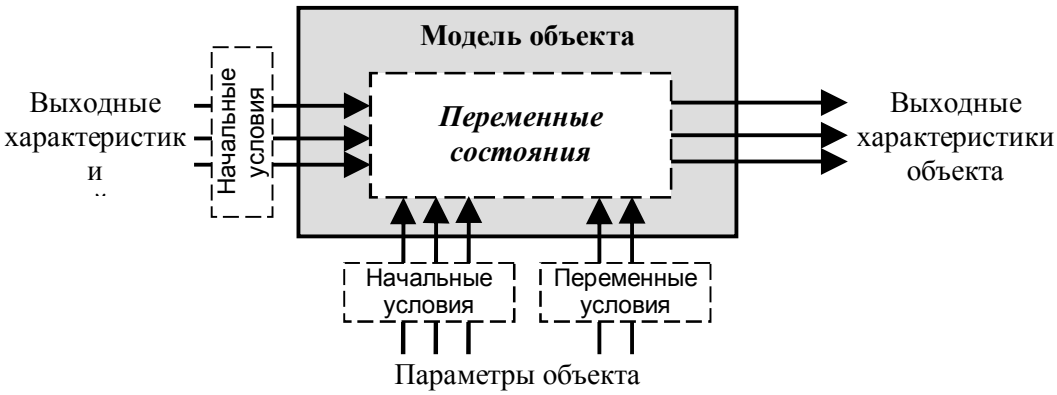


Рис. 1.3. Классификация факторов по их роли в ЭВМ

При этом ***параметрами*** объекта называются факторы, характеризующие свойства объекта или составляющих его элементов. В процессе исследования объекта ряд параметров может изменяться, поэтому они называются ***переменными,*** которые, в свою очередь, подразделяются на ***переменные состояния*** и ***переменные управления***. Как правило, переменные состояния объекта являются функцией переменных управления и воздействий внешней среды.

Характеристиками (выходными характеристиками) называются интересующие исследователя непосредственные конечные результаты функционирования объекта (естественно, что выходные характеристики являются переменными состояния). Соответственно характеристики внешней среды описывают свойства внешней среды, которые сказываются на процессе и результате функционирования объекта. Значения ряда факторов, определяющие начальное состояние объекта или внешней среды, называются ***начальными условиями.***

При рассмотрении ЭММ оперируют следующими понятиями: критерий оптимальности, целевая функция, система ограничений, уравнения связи, решение модели.

Критерием оптимальности называется некоторый показатель, имеющий экономическое содержание, служащий формализацией конкретной цели управления и выражаемый при помощи целевой функции через факторы модели. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции.

Целевая функция математически связывает между собой факторы модели, ее значение определяется значениями этих величин. Содержательный смысл целевой функции придает только критерий оптимальности.

Не следует смешивать критерий оптимальности и целевую функцию. Так например, критерии прибыли и стоимости произведенной продукции могут описываться одной и той же целевой функцией:

$$E = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \qquad (1.1)$$

где $i = \overline{1,n}$ – номенклатура производимой продукции; x_i – объем выпуска *i*-й номенклатуры; c_i – прибыль от выпуска единицы *i*-й номенклатуры или стоимость единицы *i*-й номенклатуры в зависимости от смысла критерия оптимальности.

Критерий прибыли может рассчитываться и по нелинейной целевой функции:

$$E = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i) \cdot x_i \to \max, \qquad (1.2)$$

если прибыль от выпуска единицы *i*-й номенклатуры является функцией от объема выпуска x_i.

При наличии нескольких критериев оптимальности каждый из них будет формализован своей частной целевой функцией E_k, где $k = \overline{1,K}$ – число критериев оптимальности. Для однозначного выбора оптимального решения исследователь может сформулировать новую целевую функцию

$$E = f(E_1,...,E_k,...,E_K) \to extr. \qquad (1.3)$$

Однако целевая функция может уже не нести экономического смысла, в этом случае критерий оптимальности для нее отсутствует.

Система ограничений определяет пределы, сужающие область осуществимых, приемлемых или допустимых решений и фиксирующие основные внешние и внутренние свойства объекта. Ограничения определяют область протекания процесса, пределы изменения параметров и характеристик объекта.

Уравнения связи являются математической формализацией системы ограничений.

Критерий оптимальности и система ограничений в первую очередь определяют концепцию построения будущей математической модели, т.е. концептуальную модель, а их формализация, т.е. целевая функция и уравнения связи, представляет собой математическую модель.

Решением математической модели называется такой набор (совокупность) значений переменных, который удовлетворяет ее уравнениям связи. Решения, имеющие экономический смысл, называют структурно допустимыми. Модели, имеющие много решений, называются вариантными в отличие от безвариантных, имеющих одно решение. Среди структурно допустимых решений вариантной модели, как правило, находится одно решение, при котором целевая функция в зависимости от смысла модели имеет наибольшее или наименьшее значение. Такое решение, как и соответствующее значение целевой функции, называется ***оптимальным*** (в частности, наименьшим или наибольшим).

Выбор метода решения оптимизационных ЭММ зависит от математической формы, связывающей факторы модели, наличия тех или иных признаков (учет динамики, учет стохастичности и т.д.).

По характеру цели исследования ЭММ делятся на ***оптимизационные*** (нормативные) и ***описательные*** (дескриптивные или ЭММ прямого счета).

Характерной чертой оптимизационных моделей является наличие одной или нескольких целевых функций. При этом в первом случае оптимизационные ЭММ называются ***монокритериальными***, а во втором – ***многокритериальными***. В общем виде монокритериальная ЭММ может быть представлена следующей системой отношений:

$$E = f(x_1,...,x_i,...,x_n;\ \ a_1,...,a_h,...,a_q) \to extr\,; \qquad (1.4)$$

$$g_j(x_1,...,x_i,...,x_n;\ \ a_1,...,a_h,...,a_q)\ \ \{<,\le=\ge,>\}\ \ 0\,, \qquad (1.5)$$

где E – критерий оптимальности объекта; x_i – управляемые переменные, $i=\overline{1,n}$; a_h – неуправляемые факторы модели; $h=\overline{1,q}$; g_j – уравнения связи, представляющие собой формализацию системы ограничений, $j=\overline{1,m}$; f – целевая функция – формализованное выражение критерия оптимальности.

Выражение $\{<,\le=\ge,>\}$ означает, что в ограничениях может стоять любое из приведенных в фигурных скобках логических условий.

Решение модели, заданной соотношениями (1.4) и (1.5), заключается в нахождении совокупности значений переменных

$$\bar{x}^* = \{x_1^*,...,x_i^*,...,x_n^*\},$$

обращающих в *max* (или *min*) целевую функцию E при заданных уравнениях связи g_j.

Специфика конкретных задач управления производством определила разнообразие типов оптимизационных ЭММ. Это вызвало для ряда наиболее часто повторяющихся типов ситуаций разработку "стандартных"

экономико-математических методов их описания, например, распределительные задачи различных классов, задачи управления запасами, ремонта и замены оборудования, проектирования сетей и выбора маршрутов и т.д.

Существенным признаком описательных моделей является отсутствие в них критерия оптимальности. Решение, даваемое ЭММ прямого счета, обеспечивает либо вычисление набора выходных характеристик объекта для одного или нескольких вариантов начальных условий и входных характеристик объекта, либо нахождение какой-либо совокупности значений в структурно допустимой области решений.

В зависимости от степени формализованности связей f и g_i между факторами моделей в выражениях (1.4) и (1.5) различают ***аналитические*** и ***алгоритмические*** модели.

В расширение представленного ранее отметим, что ***аналитической*** формой записи называется запись математической модели в виде алгебраических уравнений или неравенств, не имеющих разветвлений вычислительного процесса при определении значений любых переменных состояния модели, целевой функции и уравнений связи. Если в математических моделях единственная целевая функция f и ограничения g_j заданы аналитически, то подобные модели относятся к классу моделей математического программирования. Характер функциональных зависимостей, выраженных в функциях f и g_j , может быть линейным и нелинейным. Соответственно этому ЭММ делятся на ***линейные*** и ***нелинейные***, а среди последних в специальные классы выделяются ***дробно-линейные***, ***кусочно-линейные***, ***квадратичные*** и ***выпуклые*** модели.

В зависимости от того, содержит ли ЭММ случайные факторы, она может быть отнесена к классу ***стохастических*** или ***детерминированных***.

В ***детерминированных*** моделях ни целевая функция f, ни уравнения связи g_j не содержат случайных факторов. Следовательно, для данного множества входных значений модели на выходе может быть получен только один-единственный результат. Для ***стохастических*** ЭММ характерно наличие среди факторов a_h модели, описываемой соотношениями (1.4) и (1.5), таких, которые имеют вероятностную природу и характеризуются какими-либо законами распределения, причем среди функций f и g_j могут быть и случайные функции. Значения выходных характеристик в таких моделях могут быть предсказаны только в вероятностном смысле. Реализация стохастических ЭММ в большинстве случаев осуществляется на ЭВМ методами имитационного статистического моделирования.

Следующим признаком, по которому можно различать ЭММ, является связь с фактором времени. Модели, в которых входные факторы, а, следовательно, и результаты моделирования явно зависят от времени, называются ***динамическими***, а модели, в которых зависимость от времени

t либо отсутствует совсем, либо проявляется слабо или неявно, называют ***статическими***.

1.2. Последовательность разработки математических моделей

В процесс разработки и машинной реализации математической модели входят следующие этапы:

- построение концептуальной модели;
- разработка алгоритма модели системы;
- разработка программы модели системы;
- проведение машинных экспериментов с моделью системы.

1.2.1. Построение концептуальной модели

Построение концептуальной модели включает следующие подэтапы:

– постановка задачи моделирования;
– определение требований к исходной информации и ее сбор;
– выдвижение гипотез и предложений;
– определение параметров и переменных модели;
– обоснование выбора показателей и критериев эффективности системы;
– составление содержательного описания модели.

При постановке задачи моделирования дается четкая формулировка целей и задач исследования реальной системы, обосновывается необходимость машинного моделирования, выбирается методика решения задачи с учетом имеющихся ресурсов, определяется возможность разделения задачи на подзадачи.

При сборе необходимой исходной информации следует помнить, что именно от качества исходной информации об объекте моделирования зависят как адекватность модели, так и достоверность результатов моделирования.

Гипотезы при построении модели системы служат для заполнения "пробелов" в понимании задачи исследователем. Предположения дают возможность провести упрощение модели. В процессе работы с моделью системы возможно многократное возвращение к этому подэтажу в зависимости от полученных результатов моделирования и новой информации об объекте.

При определении параметров и переменных составляется перечень входных, выходных и управляющих переменных, а также внешних и внутренних параметров системы.

Выбранные показатели и критерии эффективности системы должны отражать цель функционирования системы и представлять собой функции переменных и параметров системы.

Разработка концептуальной модели завершается составлением содержательного описания, которое используется как основной документ, характеризующий результаты работы на первом этапе.

1.2.2. Разработка алгоритма модели

Разработка алгоритма модели включает следующие подэтапы:

– построение логической схемы алгоритма;
– получение математических соотношений;
– проверку достоверности алгоритма.

Вначале создается укрупненная (обобщенная) схема моделирующего алгоритма, которая задает общий порядок действий при моделировании исследуемого процесса. Затем разрабатывается детальная схема, каждый элемент которой впоследствии превращается в оператор программы.

Для комбинированных моделей разрабатывается аналитическая часть в виде явных функций и имитационная часть – в виде моделирующего алгоритма.

Проверка адекватности алгоритма должна дать ответ на вопрос, насколько алгоритм отражает замысел моделирования, сформулированный на этапе разработки концептуальной модели.

1.2.3. Разработка программы

Разработка программы на ЭВМ включает следующие подэтапы:

– выбор вычислительных средств;
– проведение программирования;
– проверку достоверности программы.

Прежде всего, выбирается тип ЭВМ (компьютера) и язык программирования. Создание программы по детально разработанному алгоритму может осуществить программист без участия и помощи разработчика модели.

После составления программы производится проверка ее достоверности на контрольном примере. На этом подэтапе необходимо оценить затраты машинного времени для расчета одной реализации моделируемого процесса, что позволит разработчику модели правильно сформулировать требования к точности и достоверности результатов моделирования.

1.2.4. Проведение машинных экспериментов с моделью системы

На этом этапе проводятся серийные расчеты по составленной и отлаженной программе. Этап включает следующие подэтапы:

– планирование машинного эксперимента;
– проведение рабочих расчетов;
– представление результатов моделирования;
– интерпретацию результатов моделирования;
– выдачу рекомендаций по оптимизации режима работы реальной системы.

Перед проведением рабочих расчетов на ЭВМ должен быть составлен план проведения эксперимента с указанием комбинации переменных и параметров, для которых должно проводиться моделирование системы. Задача заключается в разработке оптимального плана эксперимента, реализация которого позволяет при сравнительно небольшом числе испытаний модели получить достоверные данные о закономерностях функционирования системы.

Результаты моделирования могут быть представлены в виде таблиц, графиков, диаграмм, схем и т.п. В большинстве случаев наиболее простой формой считаются таблицы, хотя графики более наглядно иллюстрируют результаты моделирования системы. Целесообразно предусмотреть вывод результатов на экран дисплея и принтер.

Интерпретация результатов моделирования имеет целью переход от информации, полученной в результате машинного эксперимента с моделью, к выводам, касающимся процесса функционирования объекта-оригинала.

На основании анализа результатов моделирования принимается решение о том, при каких условиях система будет функционировать с наибольшей эффективностью.

Глава 2. Примеры составления математических моделей

Пример 2.1. Пусть некоторый экономический регион производит несколько (n) видов продуктов исключительно своими силами и только для населения данного региона. Предполагается, что технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен. Надо определить годовой объем выпуска продуктов, с учетом того, что этот объем должен обеспечить как конечное, так и производственное потребление.

Составим математическую модель этой задачи. По ее условию даны: виды продуктов, спрос на них и технологический процесс; требуется найти объем выпуска каждого вида продукта.

Обозначим известные величины:

$\boldsymbol{c}_i$ – спрос населения на i-й продукт ($i=1,...,n$); $\boldsymbol{a}_{ij}$ – количество i-го продукта, необходимое для выпуска единицы j-го продукта по данной технологии ($i=1,...,n$; $j=1,...,\underline{n}$).

Обозначим неизвестные величины:

$\boldsymbol{x}_i$ – объем выпуска i-го продукта (i=1,...,n); совокупность $\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_1,...,\boldsymbol{c}_n)$ называется вектором спроса, числа $\boldsymbol{a}_{ij}$ – технологическими коэффициентами, а совокупность $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$ – вектором выпуска.

По условию задачи вектор $\boldsymbol{x}$ распределяется на две части: на конечное потребление (вектор $\boldsymbol{c}$) и на воспроизводство (вектор $\boldsymbol{x}$-$\boldsymbol{c}$). Вычислим ту часть вектора $\boldsymbol{x}$, которая идет на воспроизводство. По нашим обозначениям для производства $\boldsymbol{x}_j$ количества j-го товара идет $\boldsymbol{a}_{ij} \cdot \boldsymbol{x}_j$ количества i-го товара.

Тогда сумма $\boldsymbol{a}_{i1} \cdot \boldsymbol{x}_1 + ... + \boldsymbol{a}_{in} \cdot \boldsymbol{x}_n$ показывает ту величину i-го товара, которая нужна для всего выпуска $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$.

Следовательно, должно выполняться равенство:

$$x_i - c_i = a_{il} \cdot x_l + ... + a_{in} \cdot x_n .$$

Распространяя это рассуждение на все виды продуктов, приходим к искомой модели:

$$x_1 - c_1 = a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{i1n} \cdot x_n$$

$$x_2 - c_2 = a_{21} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n - c_n = a_{n1} \cdot x_n + ... + a_{nn} \cdot x_n$$

Решая эту систему из n линейных уравнений относительно $x_1,...,x_n$, найдем требуемый вектор выпуска.

Для того, чтобы написать эту модель в более компактной (векторной) форме, введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная $(n \times n)$ - матрица A называется технологической матрицей. Легко проверить, что наша модель теперь запишется так: $x - c = Ax$ или

$$x \cdot Ax = c\ . \qquad (2.1)$$

Мы получили классическую модель "***Затраты – выпуск***", автором которой является известный американский экономист В. Леонтьев.

Пример 2.2. Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти: сортом *А* в количестве 10 единиц, сортом *В* - 15 единиц. При переработке из нефти получаются два материала: бензин (обозначим *Б*) и мазут (*М*). Имеются три варианта технологического процесса переработки:

I: 1ед.*А* + 2ед.*В* дает 3ед.*Б* + 2ед.*М*

II: 2ед.*А* + 1ед.*В* дает 1ед.*Б* + 5ед.*М*

III: 2ед.*А* + 2ед.*В* дает 1ед.*Б* + 2ед.*М*

Цена бензина — 10 долл. за единицу, мазута - 1 долл. за единицу.

Требуется определить наиболее выгодное сочетание технологических процессов переработки имеющегося количества нефти.

Перед моделированием уточним следующие моменты. Из условия задачи следует, что "выгодность" технологического процесса для завода следует понимать в смысле получения максимального дохода от реализации своей готовой продукции (бензина и мазута). В связи с этим понятно, что "выбор (принятие) решения" завода состоит в определении того, какую технологию и сколько раз применить. Очевидно, что таких возможных вариантов достаточно много.

Обозначим неизвестные величины:

$\boldsymbol{x}_i$ – количество использования *i*-го технологического процесса *(i=1,2,3)*.

Остальные параметры модели (запасы сортов нефти, цены бензина и мазута) *известны*.

Теперь одно конкретное решение завода сводится к выбору одного вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$, для которого выручка завода равна $(32x_1+15x_2+12x_3)$ долл. Здесь 32 долл. – это доход, полученный от одного применения первого технологического процесса (10 долл. ·3ед.*Б* + 1 долл. ·2ед.*М* = 32 долл.). Аналогичный смысл имеют коэффициенты 15 и 12 для второго и третьего технологических процессов соответственно. Учет запаса нефти приводит к следующим условиям:

для сорта *А*: $(x_1 + 2x_2 + 2x_3) \le 10$

для сорта *B*: $(2x_1+x_2+2x_3) \le 15$,

где в первом неравенстве коэффициенты 1, 2, 2 – это нормы расхода нефти сорта А для одноразового применения технологических процессов **I**, **II**, **III** соответственно. Коэффициенты второго неравенства имеют аналогичный смысл для нефти сорта В.

Математическая модель в целом имеет вид:

Найти такой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, чтобы максимизировать

$$f(x) = 32x_1+15x_2+12x_3$$

при выполнении условий:

$$(x_1 + 2x_2 + 2x_3) \le 10$$

$$(2x_1+x_2+2x_3) \le 15$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\ (x_1, x_2, x_3 \text{ – целые числа}).$$

Сокращенная форма этой записи такова:

$$f(x) = 32x_1 + 15x_2 + 12x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10, \\ &2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15, \\ &x_i > 0, \quad i = 1,2,3 \quad (\textit{целые}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Мы получили так называемую задачу линейного программирования.

Модель (2.2) является примером оптимизационной модели детерминированного типа (с вполне определенными элементами).

Пример 2.3. Инвестору требуется определить наилучший набор из акций, облигаций и других ценных бумаг для приобретения их на некоторую сумму с целью получения определенной прибыли с минимальным риском для себя. Прибыль на каждый доллар, вложенный в ценную бумагу *j*-го вида, характеризуется двумя показателями: ожидаемой прибылью и фактической прибылью. Для инвестора желательно, чтобы ожидаемая прибыль на один доллар вложений была для всего набора ценных бумаг не ниже заданной величины *b*.

Заметим, что для правильного моделирования этой задачи от математика требуются определенные базовые знания в области портфельной теории ценных бумаг.

Обозначим известные параметры задачи:

n – число разновидностей ценных бумаг; a_j – фактическая прибыль (случайное число) от j-го вида ценной бумаги; α_i – ожидаемая прибыль от *j*-го вида ценной бумаги.

***Обозначим неизвестные величины*:**

y_j - средства, выделенные для приобретения ценных бумаг вида *j*.

По нашим обозначениям вся инвестированная сумма выражается как $\sum_{i=1}^{n} y_i$. Для упрощения модели введем новые величины

$$x_j = \frac{y_j}{\sum_{i=1}^{n} y_i}, \qquad j = 1,2,...,n.$$

Таким образом, x_i - это доля от всех средств, выделяемая для приобретения ценных бумаг вида j.

Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Из условия задачи видно, что цель инвестора - достижение определенного уровня прибыли с минимальным риском. Содержательно риск - это мера отклонения фактической прибыли от ожидаемой. Поэтому его можно отождествить с ковариацией

$$\sigma_{ij} = M(a_i - \alpha_j)(a_j - \alpha_i)$$

прибыли для ценных бумаг вида i и вида j. Здесь М - обозначение математического ожидания.

Математическая модель исходной задачи имеет вид:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,...,n. \qquad (2.3)$$

Мы получили известную модель Марковица для оптимизации структуры портфеля ценных бумаг.

Модель (2.3) является примером оптимизационной модели стохастического типа (с элементами случайности).

Пример 2.4. На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума. В магазин должен быть завезен только один из типов данного товара. Требуется выбрать тот тип товара, который целесообразно завезти в магазин. Если товар типа j будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j, если же он не будет пользоваться спросом - убыток q_j.

Перед моделированием обсудим некоторые принципиальные моменты. В данной задаче лицом, принимающим решение (ЛПР), является магазин. Однако исход (получение максимальной прибыли) зависит не только от его решения, но и от того, будет ли завезенный товар пользоваться спросом, т.е. будет ли выкуплен населением (предполагается, что по какой-то причине у магазина нет возможности изучить спрос населения). Поэтому население может рассматриваться как второе ЛПР, выбирающее тип товара согласно своему предпочтению. Наихудшим для магазина "решением" населения является: "завезенный товар не пользуется спросом". Так что, для учета всевозможных ситуаций, магазину нужно

считать население своим "противником" (условно), преследующим противоположную цель – минимизировать прибыль магазина.

Итак, имеем задачу принятия решения с двумя участниками, преследующими противоположные цели. Уточним, что магазин выбирает один из типов товаров для продажи (всего *n* вариантов решений), а население - один из типов товаров, который пользуется наибольшим спросом (*n* вариантов решений).

Для составления математической модели нарисуем таблицу с *n* строками и *n* столбцами (всего n^2 клеток) и условимся, что строки соответствуют выбору магазина, а столбики - выбору населения. Тогда клетка *(i, j)* соответствует той ситуации, когда магазин выбирает *i*-й тип товара (*i*-ю строку), а население выбирает *j*-й тип товара (*j*-й столбик). В каждую клетку запишем числовую оценку (прибыль или убыток) соответствующей ситуации с точки зрения магазина:

	1	2	.....	j	.....	n
1	p_1	$-q_1$	.....	$-q_1$	.....	$-q_1$
2	$-q_2$	p_2	.....	$-q_2$	.....	$-q_2$
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....
i	$-q_i$	$-q_i$	.....	$-q_i$	.....	$-q_i$
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....
n	$-q_n$	$-q_n$	.....	$-q_n$	.....	p_n

выбор магазина

выбор населения

Числа q_i написаны с минусом для отражения убытка магазина; в каждой ситуации "выигрыш" населения (условно) равен "выигрышу" магазина, взятому с обратным знаком.

Сокращенный вид этой модели таков:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & \dots & q_1 \\ -q_2 & p_2 & \dots & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_n & -q_n & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

Мы получили так называемую матричную игру. Модель (2.4.) является примером игровых моделей принятия решения.

Глава 3. Статистическое моделирование экономических систем

3.1. Теоретические основы метода

Метод статистического моделирования (или метод ***Монте-Карло***) – это способ исследования поведения вероятностных систем (экономических, технических и т.д.) в условиях, когда неизвестны в полной мере внутренние взаимодействия в этих системах.

Этот метод заключается в воспроизведении исследуемого физического процесса при помощи вероятностной математической модели и вычислении характеристик этого процесса. Одно такое воспроизведение функционирования системы называют реализацией или испытанием. После каждого испытания регистрируют совокупность параметров, характеризующих случайный исход реализации. Метод основан на многократных испытаниях построенной модели с последующей статистической обработкой полученных данных с целью определения числовых характеристик рассматриваемого процесса в виде статистических оценок его параметров. Процесс моделирования функционирования экономической системы сводится к машинной имитации изучаемого процесса, который как бы копируется на ЭВМ со всеми сопровождающими его случайностями.

Первые сведения о методе ***Монте-Карло*** были опубликованы в конце 40-х гг. Авторами метода являются американские математики Дж. Нейман и С. Улам. В нашей стране первые работы были опубликованы в 1955-1956 гг. В.В. Чавчанидзе, Ю.А. Шрейдером и В.С. Владимировым.

Основой метода статистического моделирования является закон больших чисел. Закон больших чисел в теории вероятностей доказывает для различных условий сходимость по вероятности средних значений результатов большого числа наблюдений к некоторым постоянным величинам.

Под законом больших чисел понимают ряд теорем. Например, одна из ***теорем П.Л. Чебышева*** формулируется так: "При неограниченном увеличении числа независимых испытаний *n* среднее арифметическое свободных от систематических ошибок и равноточных результатов наблюдений ξ_i случайной величины ξ_i, имеющей конечную дисперсию $D\xi_i$, сходится по вероятности к математическому ожиданию $M\xi_i$ этой случайной величины". Это можно записать в следующем виде:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - M(\xi)\right|, \varepsilon\right\} = 1, \qquad (3.1)$$

где ε – сколь угодно малая положительная величина.

Теорема Бернулли формулируется так: "При неограниченном увеличении числа независимых испытаний в одних и тех же условиях частота $P^*(A)$ наступления случайного события *A* сходится по вероятности к его вероятности *P″,* т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m_i^*}{n} - M(\xi)\right|, \varepsilon\right\} = 1. \qquad (3.2)$$

Согласно данной теореме, для получения вероятности какого-либо события, например, вероятности состояний некоторой системы $P_i(t),\ i = \overline{0,k}$, вычисляют частоты $P_i^* = \frac{m_i^*}{n}$ для одной реализации (испытания), далее проводят подобные вычисления для числа реализаций, равного *n.* Результаты усредняют и этим самым с некоторым приближением получают искомые вероятности состояний системы. На основании вычисленных вероятностей определяют другие характеристики системы. Следует отметить, что чем больше число реализаций, тем точнее результаты вычисления искомых величин (вероятностей состояний системы).

Последнее утверждение легко доказать. Предположим, что требуется найти неизвестную величину *m.* Подберем такую случайную величину ξ, чтобы $M(\xi) = m$ и $D(\xi) = b^2$. Рассмотрим *n* случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, распределение которых совпадает с распределением ξ. Если *n* достаточно велико, то согласно центральной предельной теореме распределение суммы $\rho_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ будет приближенно нормальным с параметрами $a = n \cdot m;\ \sigma^2 = n \cdot b^2$.

Из правила "трех сигм"

$$P\{a - 3\cdot\sigma < \xi < a + 3\cdot\sigma\} = 0{,}997. \qquad (3.3)$$

Следует, что

$$P\{n\cdot m - 3b\sqrt{n} < \rho_n < \cdot m + 3\sqrt{n}\} = 0{,}997.$$

Разделим неравенство, стоящее в фигурных скобках, на *n* и получим эквивалентное неравенство с той же вероятностью:

$$P\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{n}} < \frac{\rho_n}{n} < m + \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0{,}997.$$

Это соотношение можно записать в виде:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{n}}\right\} = 0{,}997\,. \qquad (3.4)$$

Соотношение (3.4) определяет метод расчета *m* и оценку погрешности. В самом деле, найдем *n* значений случайной величины ξ. Из выражения (3.4) видно, что среднее арифметическое этих значений будет приближенно равно *m.* С вероятностью *P* = 0,997 ошибка такого приближения не превосходит величины $\frac{3b}{\sqrt{n}}$. Очевидно, эта ошибка стремится к нулю с ростом *n,* что и требовалось доказать.

Решение любой задачи методом статистического моделирования состоит в:

– разработке и построении структурной схемы процесса, выявлении основных взаимосвязей;

– формальном описании процесса;

– моделировании случайных явлений (случайных событий, случайных величин, случайных функций), сопровождающих функционирование исследуемой системы;

– моделировании (с использованием данных, полученных на предыдущем этапе) функционирования системы – воспроизведении процесса в соответствии с разработанной структурной схемой и формальным описанием;

– накоплении результатов моделирования, их статистической обработке, анализе и обобщении.

В отличие от описанных ранее математических моделей, результаты которых отражали устойчивое во времени поведение системы, результаты, получаемые при статистическом моделировании, подвержены экспериментальным ошибкам. Это означает, что любое утверждение, касающееся характеристик моделируемой системы, должно основываться на результатах соответствующих статистических проверок.

Экспериментальные ошибки при статистическом моделировании в значительной степени зависят от точности моделирования случайных явлений, сопровождающих функционирование исследуемой системы.

Известно, что при изучении вероятностных систем случайные явления могут интерпретироваться в виде случайных событий, случайных величин и случайных функций. Следовательно, моделирование случайных явлений сводится к моделированию случайных событий, случайных величин и случайных функций. Так как случайные события и случайные функции могут быть представлены через случайные величины, то и моделирование случайных событий и случайных функций производится с помощью случайных величин. В связи с этим рассмотрим сначала способы моделирования случайных величин.

Моделирование случайных величин

Для моделирования случайной величины необходимо знать ее закон распределения. Наиболее *общим способом* получения последовательности случайных чисел, распределенных по произвольному закону, является способ, в основе которого лежит их формирование из исходной последовательности случайных чисел, распределенных в интервале [0,1] по равномерному закону.

Равномерно распределенные в интервале [0,1] *последовательности случайных чисел можно получить тремя способами:*

– использование таблиц случайных чисел;
– применение генераторов случайных чисел;
– метод псевдослучайных чисел.

При решении задачи без применения ЭВМ чаще всего используют таблицы случайных чисел. В таблицах случайных чисел случайные цифры имитируют значения дискретной случайной величины с равномерным распределением:

$$\begin{array}{c|cccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & 9 \\ \rho_i & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & \dots & 0{,}1 \end{array}.$$

При составлении таких таблиц выполняется требование, чтобы каждая из этих цифр от 0; 1;...; 9 встречалась примерно одинаково часто и независимо от других с вероятностью $\rho_i = 0{,}1$.

Самая большая из опубликованных таблиц случайных чисел содержит 1000000 цифр. *Таблицы случайных чисел* составить не так просто. Они требуют тщательной проверки с помощью специальных статистических тестов.

При решении задач на ЭВМ для выработки случайных чисел, равномерно распределенных в интервале [0,1], могут применяться генераторы случайных чисел. Данные *генераторы* преобразуют результаты случайного физического процесса в двоичные числа. В качестве случайного физического процесса обычно используют собственные шумы (случайным образом меняющееся напряжение).

Недостатки данного способа получения случайных чисел следующие:

1. Трудно проверить качество вырабатываемых чисел.

2. Случайные числа невоспроизводимы (если их не запоминать), и, как следствие, нельзя повторить расчет на ЭВМ для исключения случайного сбоя.

Получение *псевдослучайных чисел* с равномерным законом распределения заключается в выработке псевдослучайных чисел. **Псевдослучайные числа** – это числа, полученные по какой-либо формуле и имитирующие значения случайной величины. Под словом "имитирующие" подразумевается, что эти числа удовлетворяют ряду тестов так, как если бы они были значениями этой случайной величины.

Первый алгоритм для получения псевдослучайных чисел предложил Дж. Нейман. Это так называемый **метод середины квадратов,** который заключается в следующем:

$\gamma_0 = 0{,}9876,\ \ \gamma_0^2 = 0{,}97535376,$

$\gamma_1 = 0{,}5353,\ \ \gamma_1^2 = 0{,}28654609,$

$\gamma_2 = 0{,}6546$ и т.д.

Алгоритм себя не оправдал: получилось больше, чем нужно, малых значений γ_i – случайных чисел. В настоящее время разработано множество алгоритмов для получения псевдослучайных чисел.

Назовем достоинства метода псевдослучайных чисел.

1. На получение каждого случайного числа затрачивается несколько простых операций, так что скорость генерирования случайных чисел имеет тот же порядок, что и скорость работы ЭВМ.
2. Малый объем памяти ЭВМ для программирования.
3. Любое из чисел легко воспроизвести.
4. Качество генерируемых случайных чисел достаточно проверить один раз.

Подавляющее число расчетов по методу Монте-Карло осуществляется с использованием псевдослучайных чисел. От последовательности случайных чисел, равномерно распределенных в интервале [0,1], нетрудно перейти к последовательности случайных чисел с произвольно заданным законом распределения.

Существует основное соотношение, связывающее случайные числа с заданным законом распределения и случайные числа с равномерным законом распределения в интервале [0,1]. Суть его состоит в том, что для преобразования последовательности случайных чисел с равномерным законом распределения в интервале [0,1] в последовательность случайных чисел с заданной функцией распределения *F(x)* необходимо из совокупности случайных чисел с равномерным законом распределения в интервале [0,1] выбрать случайное число ξ и решить уравнение:

$$F(x) = \xi \tag{3.5}$$

относительно *x*.

Решение уравнения представляет собой случайное число из совокупности случайных чисел, имеющих функцию распределения *F(x)*.

В случае, когда вместо функции распределения *F(x)* задана плотность вероятности *f(x),* соотношение (3.5) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{ч} f(x)dx = \xi. \tag{3.6}$$

Для ряда законов распределения, наиболее часто встречающихся в реальной экономике, получено аналитическое решение уравнения (3.6), результаты которого приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Закон распределения случайной величины	**Плотность распределения**	**Формула для моделирования случайной величины**
Экспоненциальный	$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$	$x_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_i$
Вейбула	$f(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^{a}\right]$	$x_i = -b \cdot (\ln \xi_i)^{1/a}$
Гамма-распределение (η – целые числа)	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\eta)} \cdot e^{-\lambda \cdot x} x^{\eta - 1}$	$x_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \ln(1 - \xi_i)$
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$x_i = \bar{x} + \sigma\left(\sum_{i=1}^{\eta} \xi_i - 6\right)$

Параметры ***закона распределения Вейбула*** выбираются по специальным таблицам (в работе не приводятся).

Пример 3.1. В результате статистической обработки экспериментальных данных получены следующие значения характеристик случайной величины *X:* $\bar{x}$ = 40,7 и σ = 30,2. Установлено, что величина *X* распределена в соответствии с законом Вейбула.

Определите параметры данного закона.

Решение.

1. Вычислим коэффициент вариации случайной величины *X:*

$$V_X = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{30{,}2}{40{,}7} = 0{,}742 .$$

2. Исходя из значения коэффициента вариации, по таблицам определяются параметры *a* и C_a. Величины параметров при *V*= 0,742 будут равны *a* = 1,4; C_a = 0,659.

3. Вычислим параметр *b* по формуле:

$$b = \frac{\sigma}{C_a} = \frac{30{,}2}{0{,}659} = 45{,}8 . \qquad (3.7)$$

Параметры гамма-распределения вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda = \frac{\bar{x}}{\sigma^2} ; \qquad (3.8)$$

$$\eta = \frac{(\bar{x})^2}{\sigma^2} . \qquad (3.9)$$

Пример 3.2. Время обслуживания пассажира в кассе Аэрофлота подчинено гамма-распределению. При этом известно среднее значение

времени обслуживания $\bar{t}$ = 42 мин.; среднее квадратическое отклонение времени равно 14,8 мин.

Вычислите параметры закона распределения.

Решение.

1. Вычислим параметр λ

$$\lambda = \frac{x}{\sigma^2} = \frac{42}{(14{,}8)^2} = 0{,}191746 .$$

2. Величину параметра η определим по следующей формуле:

$$\eta = \frac{(\bar{x})^2}{\sigma^2} = \frac{42^2}{14{,}8^2} = 8{,}74826 = 9 .$$

Пример 3.3. Для ПК интенсивность потока отказов λ = 1,2 отк/сутки. Требуется определить последовательность значений продолжительности интервалов между отказами ПК. Известно, что эти интервалы описываются показательным законом распределения.

Решение.

Определим продолжительность интервала между отказами t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с экспоненциальным законом:

$$t_i = x_i = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_i .$$

Значения ξ_i определим по таблицам случайных чисел.

Допустим, ξ_1 = 0,7182; ξ_2 = 0,4365; ξ_3 = 0,1548; ξ_4 = 0,8731.

Тогда

$t_1 = -\frac{1}{1{,}2} \cdot \ln 0{,}7182 = 6{,}6$ суток;

$t_2 = -\frac{1}{1{,}2} \cdot \ln 0{,}4365 = 16{,}6$ суток;

$t_3 = -\frac{1}{1{,}2} \cdot \ln 0{,}1548 = 37{,}3$ суток;

$t_4 = -\frac{1}{1{,}2} \cdot \ln 0{,}8731 = 2{,}7$ суток.

Моделирование случайных событий

Моделирование случайного события заключается в воспроизведении факта появления или непоявления случайного события в соответствии с заданной его вероятностью. Моделирование полной группы несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n, вероятности которых $P(A_i) = P_i$; $i = \overline{1,n}$ известны, можно свести к моделированию дискретной случайной величины *Y*, имеющей закон распределения

$$P(y_i) = P_i ,$$

где вероятности ее возможных значений

$$P(y_i) = P(A_i) = P_i .$$

Очевидно, что принятие в испытании дискретной случайной величиной Y возможного значения y_i равносильно появлению в испытании события A_i. При практической реализации данного способа на единичном отрезке числовой оси откладывают интервалы $\Delta i = P_i$ (рис. 3.1).

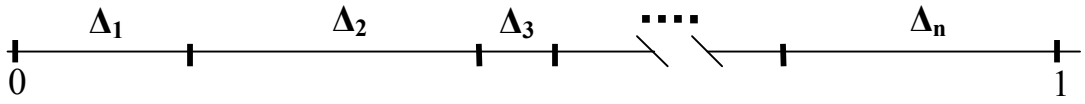


Рис. 3.1. Интервалы $\Delta i = P_i$

Вырабатывают равномерно распределенное на интервале [0,1] случайное число ξ_j и проверяют условие

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_1 \le \xi_j < \sum_{i=1}^{k} P_i . \qquad (3.10)$$

При выполнении условия (3.10) считают, что при испытании наступило событие A_k.

Нетрудно заметить, что моделирование факта появления одного события *A,* имеющего вероятность *P(A),* сводится к моделированию полной группы двух несовместных событий, т.е. противоположных событий с вероятностями $P(A)$ и $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Пример 3.4. Вероятность появления события *A* в каждом испытании *P(A)* = 0,75.

Смоделируйте три испытания и определите последовательность реализации события *A*.

Решение.

Отложим на единичном отрезке числовой оси точку E = 0,75 и будем считать, что если случайное число $\xi_i < E$, то в испытании наступило событие *A*. В противном случае при $\xi_i \ge E$ наступило событие $\overline{A}$, т.е. событие *A* не имело места.

Пусть из таблицы выбраны равномерно распределенные на интервале [0,1] случайные числа ξ_1 = 0,925; ξ_2 = 0,135; ξ_3 = 0,088. Тогда при трех испытаниях получим следующую последовательность реализации событий: $\overline{A}$; *A;* $\overline{A}$.

Моделирование совместных (зависимых и независимых) событий можно выполнить двумя способами.

Первый способ. На первом этапе моделирования определяют все возможные исходы появления совместных событий в испытании (находят полную группу несовместных событий и вычисляют их вероятности). На последующем этапе работ поступают так же, как и при моделировании полной группы несовместных событий.

Пример 3.5. Пусть при испытании могут иметь место зависимые и совместные события *A* и *B,* при этом известно, что *P(A)* = 0,7; *P(B)* = 0,5; *P(AB)* = 0,3.

Смоделируйте появление событий *A* и *B* в двух испытаниях.

Решение.

При каждом испытании возможны четыре несовместных исхода, т.е. наступление четырех событий:

1. $C_1 = AB$, при этом по условию $P(C_1) = P(AB) = 0{,}3$.
2. $C_2 = A\overline{B}$, при этом $P(C_2) = P(AB) = P(A) - P(BA) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$.
3. $C_3 = AB$, при этом $P\{C_3) = P(A\overline{B}) = P(B) - P(AB) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$.
4. $C_4 = A\overline{B}$, при этом $P(C_4) = 1 - |P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)| = 1 - (0{,}3 + 0{,}4 + +0{,}2) = 0{,}1$.

Смоделируем полную группу событий C_1, C_2, C_3, C_4 в двух испытаниях. Предварительно на единичном отрезке числовой оси (рис. 3.2) откладываем интервалы $\Delta i = P(C_i),\ i = \overline{1,4}$.

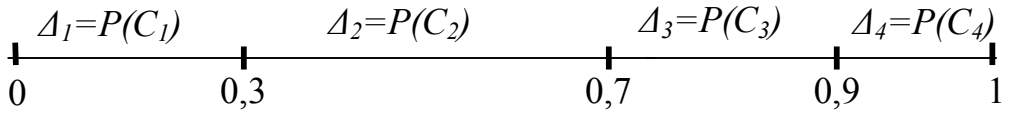


Рис. 3.2. Интервалы $\Delta i = P(C_i)$

Пусть получены (взяты из таблицы) случайные числа ξ_1 = 0,68 и ξ_2 = 0,95. Случайное число ξ_1 принадлежит интервалу Δ_2, поэтому при первом испытании имело место событие *A,* а событие *B* не наступило. При втором испытании случайное число ξ_2 принадлежит интервалу Δ_4. Оба события *A* и *B* не имели места.

Второй способ. Моделирование совместных событий состоит в разыгрывании факта появления каждого из совместных событий отдельно, при этом, если события зависимые, необходимо предварительно определить условные вероятности.

Пример 3.6. Используя условия примера 3.5, смоделируйте раздельное появление событий *A* и *B* в одном испытании.

Решение. События *A* и *B* зависимы, поэтому предварительно находим условные вероятности *P(B/A)* и $P(B/\overline{A})$:

$$P(B/A) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7};$$

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2}{1-0{,}7} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)} = \frac{0{,}5-0{,}3}{1-0{,}7} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}.$$

Для моделирования события *A* выработаем случайное число ξ_1. Пусть ξ_1 = 0,96, так как $\xi_1 > P(A)$. Событие *A* в испытании не наступило.

Теперь разыграем событие *B* при условии, что событие *A* в испытании не имело место. Пусть случайное число ξ_2 = 0,22, тогда $\xi_2 < P(B/\overline{A})$, т. е. $0{,}22 < \frac{2}{3}$. Событие *B* при испытании наступило.

Понятие о моделировании случайных функций

Для моделирования случайных функций используют два способа. В первом из них применяются специальные физические датчики, вырабатывающие непрерывные реализации случайной функции. Физические датчики с помощью специальных фильтров преобразуют собственные шумы в случайные функции с заданными характеристиками.

В основе второго способа моделирования случайных функций лежит использование случайных чисел. При этом получают значения реализации моделируемой случайной функции в изолированных точках. Сущность способа состоит в том, что воспроизведение реализации случайной функции сводится к моделированию системы коррелированных случайных величин.

3.2. Моделирование систем массового обслуживания с использованием метода Монте-Карло

Рассмотренные в работе [3] аналитические методы анализа систем массового обслуживания (СМО) исходят из предположения, что входящие и исходящие потоки требований являются простейшими. Зависимости, используемые в этих методах для определения показателей качества обслуживания, справедливы лишь для установившегося режима функционирования СМО. Однако в реальных условиях функционирования СМО имеются переходные режимы, а входящие и исходящие потоки требований являются далеко не простейшими. В этих условиях для оценки качества функционирования систем обслуживания широко используют ***метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)***. Основой решения задачи исследования функционирования СМО в реальных условиях является статистическое моделирование входящего потока требований и процесса их обслуживания (исходящего потока требований).

Для решения задачи статистического моделирования функционирования СМО должны быть заданы следующие исходные данные:

– описание СМО (тип, параметры, критерии эффективности работы системы);

– параметры закона распределения периодичности поступлений требований в систему;

– параметры закона распределения времени пребывания требования в очереди (для СМО с ожиданием);

– параметры закона распределения времени обслуживания требований в системе.

Решение задачи статистического моделирования функционирования СМО складывается из следующих этапов.

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i.

2. Равномерно распределенные случайные числа преобразуют в величины с заданным законом распределения:

– интервал времени между поступлениями требований в систему (Δt_{Ti}):

– время ухода заявки из очереди (для СМО с ограниченной длиной очереди);

– длительность времени обслуживания требования каналами (Δt_{Oi}).

3. Определяют моменты наступления событий:

– поступление требования на обслуживание;

– уход требования из очереди;

– окончание обслуживания требования в каналах системы.

4. Моделируют функционирование СМО в целом и накапливают статистические данные о процессе обслуживания.

5. Устанавливают новый момент поступления требования в систему, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.

6. Определяют показатели качества функционирования СМО путем обработки результатов моделирования методами математической статистики.

Методику решения задачи рассмотрим на ***примере моделирования СМО с отказами.***

Пусть система имеет два однотипных канала, работающих с отказами, причем моменты времени окончания обслуживания на первом канале обозначим через t_{1i}, на втором канале – через t_{2i}. Закон распределения интервала времени между смежными поступающими требованиями задан плотностью распределения $f_1(t_T)$. Продолжительность обслуживания также является случайной величиной с плотностью распределения $f_2(t_0)$.

Процедура решения задачи будет выглядеть следующим образом:

1. Вырабатывают равномерно распределенное случайное число ξ_i.

2. Равномерно распределенное случайное число преобразуют в величины с заданным законом распределения, используя формулы табл. 3.1. Определяют реализацию случайного интервала времени (Δt_{Ti}) между поступлениями требований в систему.

3. Вычисляют момент поступления заявки на обслуживание:

$$t_i = t_{i-1} + \Delta t_{Ti}.$$

4. Сравнивают моменты окончания обслуживания предшествующих заявок на первом $t_{1(i-1)}$ и втором $t_{2(i-1)}$ каналах.

5. Сравнивают момент поступления заявки t с минимальным моментом окончания обслуживания (допустим, что $t_{1(i-1)} < t_{2(i-1)}$):

а) если $\left|t_i < t_{1(i-1)}\right| < 0$, то заявка получает отказ, и вырабатывают новый момент поступления заявки описанным способом;

б) если $\left|t_i < t_{1(i-1)}\right| \geq 0$, то происходит обслуживание.

6. При выполнении условия 5б определяют время обслуживания *i*-й заявки на первом канале Δt_{1i} путем преобразования случайной величины ξ_i в величину (время обслуживания *i*-й заявки) с заданным законом распределения.

7. Вычисляют момент окончания обслуживания *i*-й заявки на первом канале $t_{1i} = [t_{1(i-1)} + \Delta t_{1i}]$.

8. Устанавливают новый момент поступления заявки, и вычислительная процедура повторяется в соответствии с изложенным.

9. В ходе моделирования СМО накапливаются статистические данные о процессе обслуживания.

10. Определяют показатели качества функционирования системы путем обработки накопленных результатов моделирования методами математической статистики.

3.3. Моделирование потоков отказов элементов сложных технических систем

Под **сложной технической системой** будем понимать систему, состоящую из элементов (два и более). Отказ одного из элементов системы приводит к отказу системы в целом.

Рассмотрим последовательность замен некоторого определенного элемента *Z* данного наименования. Эксплуатация каждого нового элемента начинается с момента окончания срока службы предыдущего. Первый элемент отрабатывает время Δt_1, второй – Δt_2, третий – Δt_3 и т.д.

Случайная ситуация, сложившаяся в *к*-м опыте (ситуации) для элемента *Z,* показана на рис. 3.3.

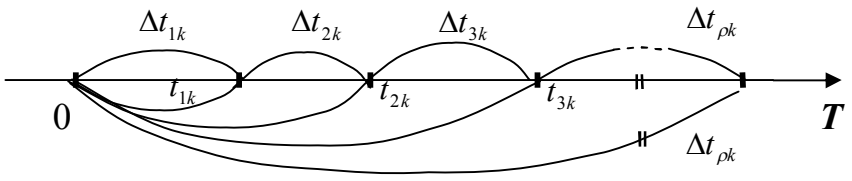


Рис. 3.3. Временная эпюра случайной ситуации при k-м опыте в случае мгновенного восстановления отказавшей системы путем замены элемента

На рис. 3.3 видно, что система начинает свою работу в момент времени $t = 0$ и, отработав случайное время Δt_{1k}, выходит из строя в момент $t_{1k} = \Delta t_{lk}$. В этот момент система мгновенно восстанавливается (здесь можно считать, что восстановление происходит мгновенно) – элемент заменяется – и снова работает случайное время Δt_{2k}. По истечении некоторого времени система (элемент) вновь выходит из строя в момент $t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}$ и вновь мгновенно восстанавливается.

Считают, что интервалы времени между отказами Δt_{ik}, Δt_{2k}, ..., Δt_{pk} представляют собой систему взаимно независимых случайных величин с плотностями распределения наработок между отказами

$$f(\Delta t_1), f(\Delta t_2), f(\Delta t_3), ..., f(\Delta t_\rho).$$

Моменты отказов или восстановлений образуют в каждом *к*-м опыте (испытании) ряд чисел по следующему правилу:

$$\begin{aligned} &t_{1k} = \Delta t_{1k}; \\ &t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} = t_{1k} + \Delta t_{2k}; \\ &t_{2k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \Delta t_{3k} = t_{2k} + \Delta t_{3k}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &t_{\rho k} = \Delta t_{1k} + \Delta t_{2k} + \ldots + \ldots + t_{\rho k} = t_{(\rho-1)k} + \Delta t_{\rho k} \end{aligned} \tag{3.11}$$

или

$$t_{\rho k} = \sum_{i=1}^{\rho} \Delta t_{ik} = \sum_{i=1}^{\rho-1} \Delta t_{ik} + \Delta t_{\rho k}, \tag{3.12}$$

где t_{ik} – время работы (наработка) элемента до *i*-го отказа в *к-м* опыте, час, $i = \overline{1, \rho}$; $k = \overline{1, N}$; Δt_{ik} – время работы (наработка) элемента между (*i*-1)-м и *i*-м отказами в *к*-й реализации, час, $i = \overline{1, \rho}$; $k = \overline{1, N}$.

Числа t_{1k}, t_{2k}, ..., t_{pk} образуют случайный поток, который называется **процессом восстановления.** Этот процесс является различным для различных элементов и продолжается до окончания срока службы системы. Изучением таких процессов занимается **теория восстановления.**

Из большого количества различных процессов восстановления для исследования надежности элементов технической системы (как неремонтируемых, так и ремонтируемых) *используют три типа процессов:*

- простой, при котором все функции распределения наработок до первого и между последующими отказами $F_i(t)$ равны;
- общий, при котором вид функции распределения наработки до первого отказа элемента, установленного в системе заводом-изготовителем, отличается от вида функций распределения наработок элементов при последующих заменах, т. е. $F_1(t) \neq F_i(t)$, $i = 2, 3, 4, ...$;
- сложный, при котором все функции распределения $F_i(t)$ различны.

Основной характеристикой процесса восстановления является функция восстановления *Ω(t)* и ее дифференциальная характеристика – плотность восстановления *ω(t)*, определяемые по следующим формулам:

$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\,; \tag{3.13}$$

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,, \tag{3.14}$$

где $f_n(t)$ *и* $F_n(t)$ - соответственно плотность и функция распределения наработки до n-го отказа.

В случае независимости наработок между отказами функции распределения $F_n(t)$ наработок до n-го отказа находятся путем последовательного применения **правила свертки для суммы двух случайных величин:**

$$\begin{aligned} &F_n(t) = F_{n-1}(t)\cdot F(\Delta t_n) = \int_0^t F_{n-1}(e-\Delta e)\cdot вA(\Delta e); \\ &F_1(t) = F(t). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Анализ и классификация методов расчета параметра и ведущей функции потока отказов приведены в работе [4]. Следует отметить, что сложность получения аналитических выражений для $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ по формулам (3.13), (3.14) состоит в том, что свертка (3.15) лишь для некоторых законов распределения вычисляется в конечном виде. Использование аналитических методов расчета плотности $\omega(t)$ и функции восстановления $\Omega(t)$ ограничено из-за сложности математической формализации применяемых стратегий восстановления работоспособности технических систем и необходимости учета множества факторов, влияющих на замену элемента в системе. В этих условиях наиболее эффективным методом расчета $\Omega(t)$ и $\omega(t)$ является ***метод Монте-Карло***.

Расчет ведущей функции и параметра потока отказов этим методом в случае простого, общего или сложного процессов производится в следующем порядке.

По известным законам распределения наработок элементов с использованием формул преобразования (табл.3.1) моделируются массивы случайных величин Δt_{jk} между (i - 1)-м и i-м отказами. Размерность каждого массива равна N.

Далее вычисляются значения наработок до i-го отказа t_{ik} по следующим формулам:

$$t_{ik} = t_{(i-1)k} + \Delta t_k\,, \tag{3.16}$$

$$t_{1k} = \Delta t_{1k}\,, \tag{3.17}$$

где i – номер отказа, $i = \overline{1,\rho}$; k – номер реализации при моделировании, $k = \overline{1,N}$; ρ – максимальное число отказов элемента, получаемое в k-й реализации случайного процесса.

Затем полученные случайные величины наработок t_{ik} группируются по интервалам времени.

Номера интервалов, в которые попадают моменты возникновения отказов $t_{1k}, t_{2k}, ..., t_{ik}, ..., t_{\rho k}$, определяются по формуле:

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right). \qquad (3.18)$$

где $CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$ – наименьшее целое число, не менее $\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$; Δt - величина интервала времени.

Параметр и ведущая функция потока отказов в j-м интервале времени определяются по следующим формулам:

$$\omega_j(t) = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{n_{ij}}{\Delta t \cdot N} = \frac{n_j}{\Delta t \cdot N}; \qquad (3.19)$$

$$\Omega_j(t) = \sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{\rho} n_{ij} = \frac{S_j}{N}, \qquad (3.20)$$

где n_{ij} – число попаданий случайной наработки до i-го отказа t_{ik} в j-й интервал времени ($j = \overline{1,h}$) за N реализаций.

$$n_j = \sum_{i=1}^{\rho} n_{ij}; \qquad (3.21)$$

$$\sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{\rho} n_{ij} = \begin{cases} S_1 = n_1 \\ S_2 = n_1 + n_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S_h = n_1 + n_2 + \ldots + n_j + \ldots + n_h \end{cases}. \qquad (3.22)$$

где h – максимальное число интервалов времени.

Методика расчета параметра $u>(t)$ и ведущей функции нестационарного потока отказов с использованием метода статистических испытаний подробно рассмотрена в работе [4].

Пример 3.7. Законы распределения наработок элемента системы до первого и второго отказов и соответствующие параметры этих законов приведены в следующей таблице:

№ отказа	Закон распределения	Параметры закона	
		a(λ)	***b***
1	Вейбула	1,4	45,8
2	Экспоненциальный	0,30	-

Определите номера временных интервалов, на которых произойдут первый и второй отказы в ходе первого опыта (испытания) (Δt = 1 час).

Решение.

1. Выберем равномерно распределенное случайное число. Допустим, $\xi_1 = 0{,}725$.

2. Вычислим случайные значения наработок на отказ элемента, используя формулы табл. 3.1.

$$t_{11} = \Delta t_{11} = -b \cdot (\ln \xi_1)^{1/a} = -45{,}8 \cdot (\ln 0{,}725)^{1/1{,}4} = 20{,}37 \text{ час.};$$

$$t_{21} = t_{11} + \Delta t_{21};$$

$$\Delta t_{21} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \xi_1 = -\frac{1}{0{,}3} \cdot \ln 0{,}725 = 1{,}07 \text{ час.};$$

$$t_{2/1} = t_{11} + \Delta t_{21} = 20{,}37 + 1{,}07 = 21{,}44 \text{ час.}$$

3. Определим номер временного интервала, на котором произойдут отказы

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{ik}}{\Delta t}\right)$$

первый отказ

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{11}}{\Delta t}\right) = CEIL\left(\frac{20{,}37}{1}\right) = 21;$$

второй отказ

$$\gamma = CEIL\left(\frac{t_{21}}{\Delta t}\right) = CEIL\left(\frac{21{,}44}{1}\right) = 22.$$

В ходе первой реализации элемент системы первый раз откажет на 21-м временном интервале, а второй отказ произойдет на 22-м временном интервале.

Задачи для самостоятельного решения [3]

3.1. Периодичность поступления заявок на обслуживание подчинена показательному закону распределения. Средний интервал между поступлениями заявок в систему равен $\bar{t} = 2$ час. Определите последовательность значений продолжительности интервалов между поступлениями заявок. Число реализаций равно 10.

3.2. Время обслуживания работника предприятия кассой бухгалтерии является случайной величиной, распределенной в соответствии с законом Вейбула. Среднее время обслуживания $\bar{t} = 3$ мин., среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 2$ мин. Требуется смоделировать случайную величину, отвечающую этим условиям. Число реализаций принять равным 10.

3.3. При обработке экспериментальных данных было установлено, что время, расходуемое на станции технического обслуживания автомобилей для замены двигателя, распределено по нормальному закону,

параметры которого $\bar{x}$ = 2,8 час. на один двигатель и $\sigma_{\bar{x}}$ = 0,6 час. Требуется смоделировать для отмеченных условий случайную величину – время *X,* расходуемое для замены двигателя. Число реализаций принять равным 5.

3.4. Время проверки приемки квартального отчета инспектором налоговой службы (*t*) - величина случайная, распределенная в соответствии с законом Вейбула. Среднее время проверки и приемки равно $\bar{t}$ = 20 мин. Коэффициент вариации величины *t* равен V_t = 0,52. Требуется смоделировать для заданных условий случайные числа *t* (число реализаций принять равным 10).

3.5. Среднее число исправных станков в токарном цехе на заводе равно $\bar{x}$ = 6. Среднее квадратическое отклонение ρ =2,2. Требуется смоделировать число исправных станков в цехе (число реализаций равно 5) при условии, что случайная величина *X* имеет гамма-распределение.

3.6. Вероятность замены неисправной детали на новую при ремонте автомобиля в каждом испытании *p* = 0,63. Смоделировать пять (5) испытаний и определить последовательность замены детали на новую или восстановленную.

3.7. При испытании могут иметь место три зависимых и совместных события: работает только первый кассир по выдаче заработной платы, работает только второй кассир, работают оба кассира. При этом известно, что вероятность работы первого кассира равна 0,6; вероятность работы второго кассира равна 0,7; вероятность работы двух кассиров равна 0,4. Смоделировать возможность реализации двух событий: работает только первый кассир; работает только второй кассир в трех испытаниях.

3.8. Известны законы распределения наработок элемента системы до первого и второго отказов. Средние значения и средние квадратические отклонения наработок приведены в следующей таблице:

№ отказа	Закон распределения	Среднее значение наработки, час.	Среднее квадратическое отклонение наработки, час.
1	Вейбула	50	28
2	Гамма - распределение	40	15

Определите параметр и ведущую функцию потока отказов элемента по интервалам времени (Δt = 10 час). Число реализаций *N* = 10.

3.9. Используя условия задачи 3.8, определите номер интервала, в который попадет максимальное количество отказов.

3.10. Система имеет два элемента. Средняя периодичность первого элемента $\bar{t}_1$ = 60 час, второго элемента – $\bar{t}_2$ = 85 час. Периодичности отказа первого и второго элементов – случайные величины, подчиненные экспоненциальному закону распределения. Определите параметр и

функцию распределения потока отказов системы по интервалам времени Δt = 8 час. Число реализаций N = 10.

3.11. Используя условия задачи 3.10, определите номера интервалов, в которые попадут максимальные количества отказов первого, второго элементов и в целом всей системы.

3.12. Пусть при испытании могут иметь место зависимые и совместные события A и D. Известно, что вероятности появления событий равны $P(A)$ = 0,6; $P(D)$ – 0,3, а также вероятность совместного появления событий A и D: $P(AD)$ = 0,4. Смоделируйте появление событий A и D в пяти испытаниях.

3.13. Периодичность проверки предприятий налоговой инспекцией – величина случайная (Δt), подчиняющаяся закону гамма-распределения. Средний интервал проверки $\Delta\bar{t}$ = 2,5 мес. Коэффициент вариации величины Δt равен V = 0,38. Требуется смоделировать для заданных условий возможные моменты проверок предприятия налоговой инспекцией (число реализаций принять равным 10).

3.14. Используя условия задачи 3.13, определите количество проверок налоговой инспекцией за первый год работы предприятия.

3.15. Среднее число работающих машин на заводе $\bar{x}$ = 25. Коэффициент вариации числа работающих V=0,6. Требуется смоделировать число работающих машин на заводе (число реализаций равно 10). Случайная величина X имеет распределение Вейбула.

3.16. После каждой проверки предприятия налоговой инспекцией вероятность появления необходимости аудиторской проверки данного предприятия P = 0,72. Смоделируйте шесть испытаний. Определите последовательность проведения различных проверок предприятия.

Глава 4. Методы и модели корреляционно-регрессионного анализа

4.1. Общие сведения

Большинство явлений и процессов в экономике находится в постоянной взаимной и всеохватывающей объективной связи. Исследование зависимостей и взаимосвязей между объективно существующими явлениями и процессами играет большую роль в экономике. Оно дает возможность глубже понять сложный механизм причинно-следственных отношений между явлениями. Для исследования интенсивности, вида и формы зависимостей широко применяется корреляционно-регрессионный анализ, который является методическим инструментарием при решении задач прогнозирования, планирования и анализа хозяйственной деятельности предприятий.

Различают два вида зависимостей между экономическими явлениями и процессами:

- функциональную;
- стохастическую (вероятностную, статистическую).

В случае функциональной зависимости имеется однозначное отображение множества *A* на множество *B*. Множество *A* называют областью определения функции, а множество *B* – множеством значений функции.

Функциональная зависимость встречается редко. В большинстве случаев функция *(Y)* или аргумент (*X*) – случайные величины. *X* и *Y* подвержены действию различных случайных факторов, среди которых могут быть факторы, общие для двух случайных величин.

Если на случайную величину *X* действуют факторы $Z_1, Z_2, \ldots, V_1, V_2$, а на $Y - Z_o, Z_2, V_1, V_3 \ldots$, то наличие двух общих факторов Z_2 и V_1 позволяет говорить о вероятностной или статистической зависимости между *X* и *Y*.

Определение. Статистической называется зависимость между случайными величинами, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение закона распределения другой величины.

В частном случае статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется математическое ожидание другой. В этом случае говорят о корреляции или корреляционной зависимости.

Статистическая зависимость проявляется только в массовом процессе, при большом числе единиц совокупности.

При стохастической закономерности для заданных значений зависимой переменной можно указать ряд значений объясняющей переменной, случайно рассеянных в интервале. Каждому фиксированному значению аргумента соответствует определенное статистическое

распределение значений функции. Это обусловливается тем, что зависимая переменная, кроме выделенной переменной, подвержена влиянию ряда неконтролируемых или неучтенных факторов. Поскольку значения зависимой переменной подвержены случайному разбросу, они не могут быть предсказаны с достаточной точностью, а только указаны с определенной вероятностью.

В экономике приходится иметь дело со многими явлениями, имеющими вероятностный характер. Например, к числу случайных величин можно отнести: стоимость продукции, доходы предприятия, межремонтный пробег автомобилей, время ремонта оборудования и т.д.

Односторонняя вероятностная зависимость между случайными величинами есть регрессия. Она устанавливает соответствие между этими величинами.

Односторонняя стохастическая зависимость выражается с помощью функции, которая называется **регрессией.**

Перечислим ***различные виды регрессии***.

1. Регрессия относительно числа переменных:

- простая регрессия - регрессия между двумя переменными;
- множественная регрессия - регрессия между зависимой переменной y и несколькими объясняющими переменными $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Множественная линейная регрессия имеет следующий вид:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \qquad (4.1)$$

где y – функция регрессии;

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ – независимые переменные;

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ – коэффициенты регрессии;

a_0 – свободный член уравнения;

m – число факторов, включаемых в модель.

2. Регрессия относительно формы зависимости:

- линейная регрессия, выражаемая линейной функцией;
- нелинейная регрессия, выражаемая нелинейной функцией.

3. В зависимости от характера регрессии различают следующие ее виды:

– положительную регрессию. Она имеет место, если с увеличением (уменьшением) объясняющей переменной значения зависимой переменной также соответственно увеличиваются (уменьшаются);

– отрицательную регрессию. В этом случае с увеличением или уменьшением объясняющей переменной зависимая переменная уменьшается или увеличивается.

Относительно типа соединения явлений различают:

– непосредственную регрессию. В этом случае зависимая и объясняющая переменные связаны непосредственно друг с другом;

– косвенную регрессию. В этом случае объясняющая переменная действует на зависимую через ряд других переменных;

– ложную регрессию. Она возникает при формальном подходе к исследуемым явлениям без уяснения того, какие причины обусловливают данную связь.

Регрессия тесно связана с корреляцией. **Корреляция** в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями. Связи между явлениями могут быть различными по силе. При измерении тесноты связи говорят о корреляции в узком смысле слова. Если случайные переменные причинно обусловлены и можно в вероятностном смысле высказаться об их связи, то имеется корреляция.

Понятия "корреляция" и "регрессия" тесно связаны между собой. В корреляционном анализе оценивается сила связи, а в регрессионном анализе исследуется ее форма. Корреляция в широком смысле объединяет корреляцию в узком смысле и регрессию.

Корреляция, как и регрессия, имеет различные виды:

1. Относительно характера корреляции различают:
– положительную;
– отрицательную.
2. Относительно числа переменных:
– простую;
– множественную;
– частную.
3. Относительно формы связи:
– линейную;
– нелинейную.
4. Относительно типа соединения:
– непосредственную;
– косвенную;
– ложную.

Любое причинное влияние может выражаться либо функциональной, либо корреляционной связью. Но не каждая функция или корреляция соответствует причинной зависимости между явлениями. Поэтому требуется обязательное исследование причинно-следственных связей.

Исследование корреляционных связей мы называем корреляционным анализом, а исследование односторонних стохастических зависимостей - регрессионным анализом. Корреляционный и регрессионный анализ имеют свои задачи.

К задачам корреляционного анализа относятся следующие:

1. Измерение степени связности (тесноты, силы) двух и более явлений. Здесь речь идет в основном о подтверждении уже известных связей.

2. Отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак, на основании измерения тесноты связи между явлениями.

3. Обнаружение неизвестных причинных связей. Корреляция непосредственно не выявляет причинных связей между явлениями, но устанавливает степень необходимости этих связей и достоверность суждений об их наличии. Причинный характер связей выясняется с помощью логически профессиональных рассуждений, раскрывающих механизм связей.

Перечислим задачи регрессионного анализа.

1. Установление формы зависимости (линейная или нелинейная; положительная или отрицательная и т.д.).

2. Определение функции регрессии и установление влияния факторов на зависимую переменную. Важно не только определить форму регрессии, указать общую тенденцию изменения зависимой переменной, но и выяснить, каково было бы действие на зависимую переменную главных факторов, если бы прочие не изменялись и если бы были исключены случайные элементы. Для этого определяют функцию регрессии в виде математического уравнения того или иного типа.

3. Оценка неизвестных значений зависимой переменной, т.е. решение задач экстраполяции и интерполяции. В ходе экстраполяции распространяются тенденции, установленные в прошлом, на будущий период. Экстраполяция широко используется в прогнозировании. В ходе интерполяции определяют недостающие значения, соответствующие моментам времени между известными моментами, т.е. определяют значения зависимой переменной внутри интервала заданных значений факторов.

Рассмотрим подробнее регрессию.

Выборочные уравнения регрессии

Условное математическое ожидание случайной величины *Y: M(Y/X)* есть функция от *X,* которая называется функцией регрессии и равна *f(x)*, т.е.:

$$M(Y/X = f(x); \tag{4.2}$$

аналогично

$$M(X/Y = \varphi(y). \tag{4.3}$$

Графическое изображение *f(x)* или $\varphi(y)$ называется линией регрессии, а записанные уравнения (4.2) и (4.3) – уравнениями регрессии.

Поскольку условное математическое ожидание *M* случайной величины *Y* есть функция от (*x*), то его оценка $\bar{y}$, т.е. условная средняя, также является функцией от *X.* Обозначим эту функцию через

$$\bar{y}_x = f^*(x). \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) определяет выборочное уравнение регрессии *y* на *x*. Сама функция $f^*(x)$ называется выборочной регрессией *Y* на *X,* а график $f^*(x)$ – выборочной регрессией. Аналогично определяется для случайных величин *X:*

$$\bar{x}_y = \varphi^*(y). \tag{4.5}$$

Функция регрессии необратима, так как речь идет о средних величинах для некоторого конкретного значения фактора.

Функция регрессии формально устанавливает соответствие между переменными *X* и *Y*, хотя такой зависимости в экономике может и не быть (ложная регрессия).

Линейная регрессия

Пусть задана система случайных величин *X* и *Y* и случайные величины *X* и Y зависимы.

Представим одну из случайных величин как линейную функцию другой случайной величины *X.*

$$Y = g(x) = \alpha + \beta x, \tag{4.6}$$

где *α, β* – параметры, которые подлежат определению.

В общем случае эти параметры могут быть определены различными способами, наиболее часто используется ***метод наименьших квадратов*** (***МНК***).

Функцию *g(x)* называют наилучшим приближением в смысле ***МНК***, если математическое ожидание $M[Y - g(x)]^2$ принимает наименьшее возможное значение.

В этом случае функцию *g(x)* называют средней квадратической регрессией *Y* на *X.* Можно доказать, что линейная средняя квадратическая регрессия имеет вид:

$$g(x) = \alpha + \beta x = m_y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}m_x + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x, \tag{4.7}$$

где m_x, m_y - математические ожидания случайных величин *X, Y* соответственно; σ_x ,σ_y – средние квадратические отклонения случайных величин *X, Y* соответственно; *r* – коэффициент парной корреляции, который определяется по формуле:

$$r = \frac{M_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \tag{4.8}$$

где M_{xy} – ковариация.

$$M_{xy} = M\lfloor (X - m_x)\cdot(y - m_y)\rfloor, \tag{4.9}$$

тогда $\beta = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ – коэффициент регрессии. Возникает проблема определения параметров *α* и *β* на основе выборки.

Рассмотрим определение параметров выбранного уравнения прямой линии средней квадратической регрессии по несгруппированным данным.

Пусть изучается система количественных признаков *(X, Y),* т.е. ведутся наблюдения за двухмерной случайной величиной *(X, Y).* Пусть в результате *n* наблюдений получено *n* пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).

Требуется по полученным данным найти выборочное уравнение прямой линии средней квадратической регрессии:

$$\bar{y}_x = kx + b.$$

Поскольку данные несгруппированные, т.е. каждая пара чисел встречается один раз, то можно перейти от условной средней к переменной *y*. Угловой коэффициент *k* обозначим через $k = \rho$ и назовем его выборочной оценкой коэффициента регрессии $\beta = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$.

Итак, требуется найти:

$$y = \rho x + b. \qquad (4.10)$$

Очевидно, параметры ρ и *b* нужно подобрать так, чтобы точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), построенные по исходным данным, лежали как можно ближе к прямой (4.10) (рис. 4.1).

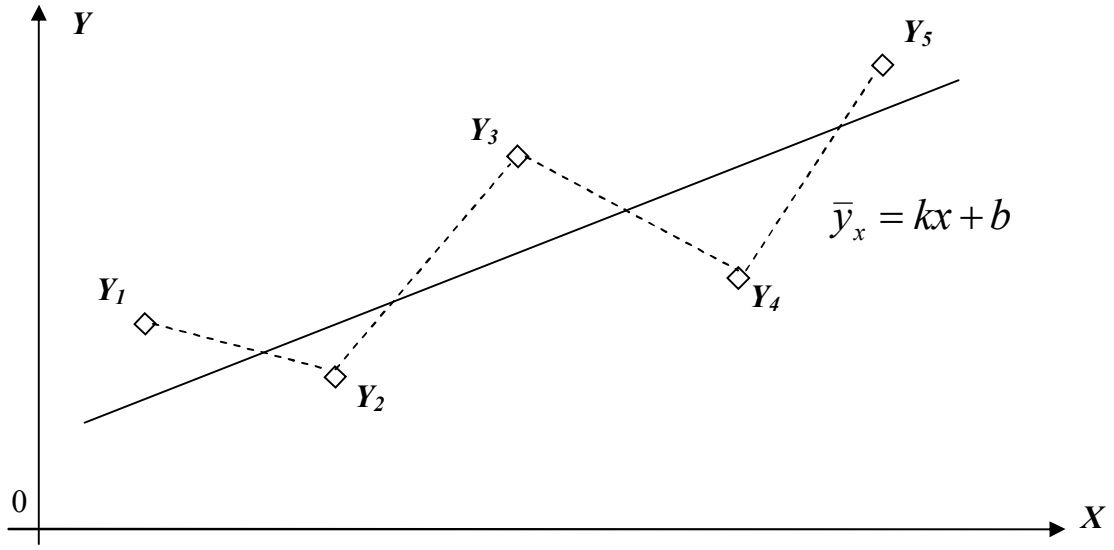


Рис. 4.1. Динамика изменения признака Y

Уточним смысл этого требования. Для этого введем следующее понятие. Назовем отклонением разность вида:

$$Y_i - y_i (i = 1,2,...,n),$$

где Y_i – вычисляется по уравнению (4.10) и соответствует наблюдаемому значению x_i; y_i – наблюдаемая ордината, соответствующая x_i.

Подберем параметры ρ и *b* так, чтобы сумма квадратов указанных отклонений была наименьшей: в этом состоит требование метода наименьших квадратов **(МНК).**

Эта сумма есть функция *F* отыскиваемых параметров ρ и *b*:

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2$$

$$F(\rho,b)=\sum_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)^2 .$$

Для отыскания min найдем произвольные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases}\dfrac{dF}{d\rho}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)\cdot x_i=0,\\ \dfrac{dF}{d\rho}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho x_i+b-y_i)=0,\end{cases}$$

Далее запишем систему:

$$\begin{cases}\left(\sum\limits_{i=`}^{n}x_i^2\right)\cdot\rho+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot b-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0\\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\rho+n\cdot b-\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=0\end{cases}$$

Для простоты вместо $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$ будем писать $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum xy$, $\sum y$ (индекс i опускаем), тогда:

$$\begin{cases}\left(\sum x_i^2\right)\cdot\rho+\left(\sum x_i\right)\cdot b-\sum x_i=0\\ \left(\sum x_i\right)\cdot\rho+n\cdot b-\sum y_i=0\end{cases}$$

Получили систему двух линейных уравнений относительно ρ и b. Решая эту систему, получим:

$$\rho=\frac{n\cdot\sum xy-\sum x\cdot\sum y}{x^2-\left(\sum x\right)^2}; \qquad (4.11)$$

$$b=\frac{\sum y\cdot\sum x^2-\sum x\cdot\sum xy}{n\cdot\sum x^2-\left(\sum x\right)^2}. \qquad (4.12)$$

Метод наименьших квадратов применяется и для нахождения параметров множественной регрессии. В этом случае число линейных уравнений возрастает, и такие системы уравнений решаются с помощью ЭВМ.

Основные понятия корреляционно-регрессионного анализа

1. Среднее значение переменной определяется по следующей формуле:

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}, \qquad (4.13)$$

где x_i – эмпирическое значение переменной x;

n – число наблюдений.

2. Дисперсия

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \tag{4.14}$$

3. Ковариация

$$Cov_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})\right]. \tag{4.15}$$

4. Коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}. \tag{4.16}$$

Коэффициент корреляции характеризует тесноту или силу связи между переменными *y* и *x*. Значения, принимаемые r_{xy}, заключены в пределах от -1 до +1. При положительном значении r_{xy} имеет место положительная корреляция, т.е. с увеличением (уменьшением) значений одной переменной (*x*) значение другой *(y)* соответственно увеличивается (уменьшается). При отрицательном значении r_{xv} имеет место отрицательная корреляция, т.е. с увеличением (уменьшением) значений *x* значения *y* соответственно уменьшаются (увеличиваются). При изучении экономического явления, зависящего от многих факторов, строится множественная регрессионная зависимость. В этом случае для характеристики тесноты связи используется коэффициент множественной корреляции:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_{общ}^2}}. \tag{4.17}$$

где $\sigma_{ост}^2$ – остаточная дисперсия зависимой переменной;

$\sigma_{общ}^2$ – общая дисперсия зависимой переменной.

5. Общая дисперсия определяется по формуле:

$$\sigma_{общ}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}. \tag{4.18}$$

Величина $\sigma_{общ}^2$ характеризует разброс наблюдений фактических значений $\bar{y}$.

6. Остаточная дисперсия определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_{iT})^2}{n-1}, \tag{4.19}$$

где y_{iT} – теоретические значения переменной *y,* полученные по уравнению регрессии (4.1) при подстановке в него наблюдаемых фактических значений x_i.

Остаточная дисперсия характеризует ту часть рассеяния переменной *y,* которая возникает из-за всякого рода случайностей и влияния неучтенных факторов.

7. Коэффициент детерминации служит для оценки точности регрессии, т.е. соответствия полученного уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным, и вычисляется по формуле

$$Д = 1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}. \qquad (4.20)$$

Д изменяется в пределах от 0 до 1, т.е. $0 \le Д \le 1$.

Модель считается тем точнее, чем ближе *Д* к 1, т.е. чем меньше $\sigma^2_{ост}$.

Стандартная ошибка оценки равна $\sqrt{\sigma^2_{ост}}$.

Если *Д* = 0, это значит, что отношение $\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}$=1, т.е. $\sigma^2_{ост} = \sigma^2_{общ}$, и, следовательно, $y_{iT} = \bar{y}$. *В* этом случае прямая регрессии будет параллельна оси *X*, корреляционно-регрессионная связь между *X* и *Y* отсутствует. Если *Д* = 1, это значит, что отношение $\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_{общ}}$= 0, т.е. $\sigma^2_{ост} = 0$, и, следовательно, $y_i = y_{iT}$, т.е все наблюдаемые точки лежат на построенной прямой, следовательно, зависимость функциональная.

8. Корреляционное отношение используется для оценки тесноты связи между двумя явлениями, в частности для определения тесноты связи исходного ряда y_i с теоретическим рядом $y_{i\tau}$. Корреляционное отношение определяют по данным, сгруппированным по объясняющей переменной по следующей формуле:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{i\tau} - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}. \qquad (4.21)$$

4.2. Исходные предпосылки регрессионного анализа и свойства оценок

Применение метода наименьших квадратов для определения параметров регрессии предполагает выполнение некоторых предпосылок [15].

Отметим наиболее существенные из них.

Предпосылка 1. При нахождении оценок переменной *y* предполагается существование зависимости переменной *y* только от тех объясняющих переменных, которые вошли в модель (регрессию). Влияние

прочих факторов и случайностей учитывается случайной возмущающей переменной z. При этом полагаем, что для фиксированных значений переменных $x_i (i = \overline{1,m})$ среднее значение переменной *z* равно нулю.

Предпосылка 2. Предполагается, что влияние неучтенных факторов постоянно. Так, при рассмотрении временных рядов в различные периоды эти неучтенные факторы оказывают одинаковое влияние.

Предпосылка 3. Отсутствует автокорреляция между возмущающими переменными *z*.

Предпосылка 4. Число наблюдений должно превышать число параметров регрессии, иначе невозможна оценка этих параметров.

Предпосылка 5. Предполагается односторонняя зависимость переменной *y* от факторов $x_i (i = \overline{1,m})$, отсутствие взаимосвязи.

Предпосылка 6. Зависимая переменная *y* и факторы $x_i (i = \overline{1,m})$ распределены нормально.

С помощью регрессионного анализа при указанных выше предпосылках находят оценки параметров, наиболее хорошо согласующиеся с опытными данными. Данные оценки должны обладать определенными свойствами. Рассмотрим некоторые из этих свойств (без доказательства).

1. ***Несмещенность оценок параметров регрессии.*** Оценка параметров регрессии называется несмещенной, если для любого фиксированного числа наблюдений выполняется равенство математического ожидания параметра и значения параметра регрессии. Надо отметить, что оценки, полученные методом наименьших квадратов, обладают свойством несмещенности.

2. ***Состоятельность оценок параметров регрессии***. Данное свойство состоит в том, что с ростом объема выборки оценка параметра регрессии *b* сходится к теоретическому значению параметра *β* (вычисленного по всей генеральной совокупности), т.е. ошибка оценки стремится к нулю:

$$P(\lim_{n \to \infty} b) = \beta . \qquad (4.22)$$

3. ***Эффективность оценок параметров регрессии.*** Несмещенная оценка параметра регрессии называется несмещенной эффективной, если она среди всех прочих несмещенных оценок этого же параметра обладает наименьшей дисперсией.

4. ***Достаточность оценки.*** Если *β* представляет собой достаточную оценку параметра *b,* то не существует другой оценки этого параметра, которую можно получить по выборке из некоторой генеральной совокупности и которая дала бы дополнительную информацию о нем. Р. Фишер показал, что количество измеримой информации, содержащейся в некоторой оценке, равно обратной величине от ее дисперсии. Таким образом, понятие достаточности эквивалентно требованию минимальной

дисперсии. Достаточная оценка с необходимостью должна быть эффективной и, следовательно, также состоятельной и несмещенной.

4.3. Этапы построения многофакторной корреляционной регрессионной модели

Разработка модели и исследование экономических процессов должны выполняться по следующим этапам.

1. Априорное исследование экономической проблемы.
2. Формирование перечня факторов и их логический анализ.
3. Сбор исходных данных и их первичная обработка.
4. Спецификация функции регрессии.
5. Оценка функции регрессии.
6. Отбор главных факторов.
7. Проверка адекватности модели.
8. Экономическая интерпретация.
9. Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Рассмотрим подробнее содержание этапов.

1. ***Априорное исследование экономической проблемы.***

В соответствии с целью работы на основе знаний макро- и микроэкономики конкретизируются явления, процессы, зависимость между которыми подлежит оценке. При этом подразумевается прежде всего четкое определение экономических явлений, установление объектов и периода исследования.

На этом этапе исследования должны быть сформулированы экономически осмысленные и приемлемые гипотезы о зависимости экономических явлений.

2. ***Формирование перечня факторов и их логический анализ.***

Для определения наиболее разумного числа переменных в регрессионной модели, прежде всего, ориентируются на соображения профессионально-теоретического характера. Исходя из физического смысла явления, производят классификацию переменных на зависимую и объясняющую.

3. ***Сбор исходных данных и их первичная обработка.***

При построении модели исходная информация может быть собрана в трех видах:

– динамические (временные) ряды;

– пространственная информация - информация о работе нескольких объектов в одном разрезе времени;

– сменная - табличная форма. Информация о работе нескольких объектов за разные периоды.

Объем выборки зависит от числа факторов, включаемых в модель с учетом свободного члена. Для получения статистически значимой модели требуется на один фактор объем выборки, равный $l = 5 \div 8$ наблюдений. Например, если в модель включаются три фактора, то минимальный объем выборки

$$n_{\min} = 5 \cdot (m + n) = 5 \cdot (3 + 1) = 20,$$

где m – число факторов, включаемых в модель; n – число свободных членов в уравнении.

Если в квартальном разрезе собирать данные, то надо их собирать за 5 лет [20/4].

4. ***Спецификация функции регрессии***.

На данном этапе исследования дается конкретная формулировка гипотезы о форме связи (линейная или нелинейная, простая или множественная и т.д.). Для этого используются различные критерии для проверки состоятельности гипотетического вида зависимости. На этом этапе проверяются предпосылки корреляционно-регрессионного анализа.

5. ***Оценка функции регрессии.***

Здесь определяются числовые значения параметров регрессии и вычисление ряда показателей, характеризующих точность регрессионного анализа.

6. ***Отбор главных факторов.***

Выбор факторов – основа для построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.

На этапе "Формирование перечня факторов и их логический анализ" собираются все возможные факторы, обычно более 20-30 факторов. Но это неудобно для анализа, и модель, включающая 20–30 факторов, будет неустойчива. Неустойчивость модели находит выражение в том, что в ней изменение некоторых факторов ведет к увеличению y вместо снижения y.

Мало факторов – тоже плохо. Это может привести к ошибкам при принятии решений в ходе анализа модели. Поэтому необходимо выбирать более рациональный перечень факторов. При этом проводят анализ факторов на мультиколлинеарность.

Анализ и способы снижения влияния мультиколлинеарности на значимость модели

Мультиколлинеарность – попарная корреляционная зависимость между факторами.

Мультиколлинеарная зависимость присутствует, если коэффициент парной корреляции $r_{ij} =\geq 0{,}70 \div 0{,}80$.

Отрицательное воздействие мультиколлинеарности состоит в следующем:

1. Усложняется процедура выбора главных факторов.

2. Искажается смысл коэффициента множественной корреляции (он предполагает независимость факторов).

3. Усложняются вычисления при построении самой модели.

4. Снижается точность оценки параметров регрессии, искажается оценка дисперсии.

Следствием снижения точности является ненадежность коэффициентов регрессии и отчасти неприемлемость их использования для интерпретации как меры воздействия соответствующей объясняющей переменной на зависимую переменную.

Оценки коэффициента становятся очень чувствительными к выборочным наблюдениям. Небольшое увеличение объема выборки может привести к очень сильным сдвигам в значениях оценок. Кроме того, стандартные ошибки оценок входят в формулы критерия значимости, поэтому применение самих критериев становится также ненадежным. Из сказанного ясно, что исследователь должен пытаться установить стохастическую мультиколлинеарность и по возможности устранить ее.

Для измерения мультиколлинеарности можно использовать коэффициент множественной детерминации

$$Д = R^2, \tag{4.23}$$

где R – коэффициент множественной корреляции.

При отсутствии мультиколлинеарности факторов

$$Д = \sum_{j=1}^{m} d_{yj}, \tag{4.24}$$

где d_{yj} – коэффициент парной детерминации, вычисляемый по формуле

$$d_{yj} = r_{yj}^2, \tag{4.25}$$

где r_{yj} – коэффициент парной корреляции между j-м фактором и зависимой переменной y.

При наличии мультиколлинеарности соотношение (4.24) не соблюдается. Поэтому в качестве меры мультиколлинеарности используется следующая разность:

$$M = Д - \sum_{j=1}^{m} d_{yj}. \tag{4.26}$$

Чем меньше эта разность, тем меньше мультиколлинеарность. Для устранения мультиколлинеарности используется **метод исключения переменных.** Этот метод заключается в том, что высоко коррелированные объясняющие переменные (факторы) устраняются из регрессии и она заново оценивается. Отбор переменных, подлежащих исключению, производится с помощью коэффициентов парной корреляции. Опыт показывает, что если $|r_{yj}| \geq 0{,}70$, то одну из переменных можно исключить, но какую переменную исключить из анализа, решают исходя из управляемости факторов на уровне предприятия.

Обычно в модели оставляют тот фактор, на который можно разработать мероприятие, обеспечивающее улучшение значения этого фактора в планируемом году. Возможна ситуация, когда оба мультиколлинеарных фактора управляемы на уровне предприятия.

Решить вопрос об исключении того или иного фактора можно только в соответствии с процедурой отбора главных факторов.

Отбор факторов - не самостоятельный процесс, он сопровождается построением модели. Принятие решения об исключении факторов производится на основе анализа значений специальных статистических характеристик и с учетом управляемости факторов на уровне предприятия.

Процедура отбора главных факторов обязательно включает следующие этапы:

1). *Анализ факторов на мультиколлинеарностъ и ее исключение.* Здесь производится анализ значений коэффициентов парной корреляции r_{yj} между факторами x_i и x_j.

2). *Анализ тесноты взаимосвязи факторов (x) с зависимой переменной (y).*

Для анализа тесноты взаимосвязи x и y используются значения коэффициента парной корреляции между фактором и функцией (r_{yj}). Величина r_{yj} определяется на ЭВМ и представлена в **корреляционной матрице** вида:

№ переменной	x_1	x_2	x_3	…	x_m	y
x_1	1	r_{x1x2}	r_{x1x3}	…	r_{x1xm}	r_{x1y}
x_2	r_{x2x1}	1	r_{x2x3}	…	r_{x2xm}	r_{x2y}
x_3	r_{x3x1}	r_{x3x2}	1	…	r_{x3xm}	r_{x3y}
...	…	…	…	…	…	…
x_m	r_{xmx1}	r_{xmx2}	r_{xmx3}	…	1	r_{xmy}
y	r_{yx1}	r_{yx2}	r_{yx3}	…	r_{yxm}	1

Факторы, для которых r_{yj} = О, т.е. не связанные с y, подлежат исключению в первую очередь. Факторы, имеющие наименьшее значение r_{yj}, могут быть потенциально исключены из модели. Вопрос об их окончательном исключении решается в ходе анализа других статистических характеристик.

3). *Анализ коэффициентов β факторов, которые потенциально могут быть исключены.*

Коэффициент β учитывает влияние анализируемых факторов на y с учетом различий в уровне их колеблемости. Коэффициент β показывает, на

сколько сигм (средних квадратических отклонений) изменяется функция с изменением соответствующего аргумента на одну сигму при фиксированном значении остальных аргументов:

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{xk}}{\sigma_y}, \qquad (4.27)$$

где β_k – коэффициент β k-го фактора; σ_{xk} – среднее квадратическое отклонение k-го фактора; σ_y – среднее квадратическое отклонение функции; σ_k – коэффициент регрессии при $к$-м факторе.

Из двух факторов x_i и x_j может быть исключен тот фактор, который имеет меньшее значение β.

Допустим, исключению подлежит один из мультиколлинеарных факторов x_i или x_j. Оба фактора управляемы на уровне предприятия, коэффициенты регрессии a_i и a_j статистически значимы. Фактор x_i более тесно связан с y, т.е. $r_{xiy} > r_{xjy}$, но при этом $\beta_{xi} < \beta_{xj}$. В этом случае обычно исключению подлежит фактор x_j.

4). *Проверка коэффициентов регрессии на статистическую значимость.*

Проверка может быть произведена двумя способами:

• проверка статистической значимости $a_к$ по ***критерию Стьюдента*** проводится по следующей формуле:

$$t_k = \frac{a_k}{S_{ak}}, \qquad (4.28)$$

где a_k – коэффициент регрессии при *к-м* факторе;

S_{ak} – стандартное отклонение оценки параметра $a_к$ [15].

Число степеней свободы статистики t_k равно $f = n - m - 1$, где m – количество факторов, включенных в модель. Значение t, вычисляемое по формуле (4.28), сравнивают с критическим значением t_{fa}, найденным по таблице Приложения 1 при заданном уровне значимости a и числе степеней свободы f (двусторонняя критическая область).

Если $t_k > t_{fa}$, то $a_к$ существенно больше 0, а фактор $x_к$ оказывает существенное влияние на y. При этом фактор $x_к$ оставляем в модели. Если $t_k < t_{fa}$, то фактор исключаем из модели;

• проверка статистической значимости $a_к$ по ***критерию Фишера*** –

$$F_k = \left(\frac{a_k}{S_{ak}}\right)^2 = t^2, \qquad (4.29)$$

где t^2 - многомерный аналог критерия Стьюдента.

Число степеней свободы статистики F_k следующее: $f_1 = 1$, $f_2 = n - m - 1$. Значение F_k, вычисляемое по формуле (4.29), сравнивают с критическим значением F_{f1f2a}, найденным по таблице Приложения 2, при заданных уровне значимости a и числе степеней свободы f_1, f_2.

Если $F_k \geq F_{f1f2a}$, то $a_к$ существенно больше 0, а фактор $x_к$ оказывает существенное влияние на y. При этом фактор $x_к$ оставляем в модели. Если $F_k < F_{f1f2a}$, то фактор исключаем из модели.

5). *Анализ факторов на управляемость.*

В ходе логического анализа на основе экономических знаний исследователь должен сделать вывод: можно ли разработать организационно-технические мероприятия, направленные на улучшение (изменение) выбранных факторов на уровне предприятия. Если это возможно, то данные факторы управляемы. Неуправляемые факторы на уровне предприятия могут быть исключены из модели. Например, из двух факторов x_1 – средняя техническая скорость автомобилей и x_2 – время погрузки-разгрузки на одну ездку при равенстве или близких по значению таких характеристик, как r_{x1y} и r_{x2y}, β_{x1} и β_{x2}, исключению подлежит x_1. На уровне АТП практически невозможно повлиять на значение технической скорости, которая зависит в основном от климатических условий и величины транспортного потока.

6). *Строится новая регрессионная модель без исключенных факторов.* Для этой модели определяется коэффициент множественной детерминации *Д*.

7). *Исследование целесообразности исключения факторов из модели с помощью коэффициента детерминации.*

Прежде чем вынести решение об исключении переменных из анализа в силу их незначимого влияния на зависимую переменную, производят исследования с помощью коэффициента детерминации.

В первой регрессии содержится m объясняющих переменных, во второй – только часть из них, а именно m_1 объясняющих переменных. При этом $m = m_1 + m_2$, т.е. во вторую регрессию мы не включили m_2 объясняющих переменных. Теперь следует проверить, вносят ли совместно эти m_2 переменных существенную долю в объяснение вариации переменной y. Для этого используется статистика

$$F = \frac{(Д_m - Д_{mi}) \cdot (n - m - 1)}{(m - m_i) \cdot (1 - Д_m)}, \qquad (4.30)$$

которая имеет F-распределение с $f_1 = m - m_1 = m_2$ и $f_2 = n - m - 1$ степенями свободы. Здесь $Д_m$ означает коэффициент детерминации регрессии с m объясняющими переменными, а $Д_{mi}$ – коэффициент детерминации регрессии с m_1 факторами.

Разность $(Д_m - Д_{mi})$ в числителе формулы является мерой дополнительного объяснения вариации переменной y за счет включения m_2 переменных.

Критическое значение F_{f1f2} находят по таблице F-распределения при заданном уровне значимости a и f_1 и f_2 степенях свободы. Если $F_k \leq F_{f1f2a}$,

то включение дополнительно объясняющих переменных совместно не оказывает значимого влияния на переменную *y*. Если $F_k > F_{f1f2a}$, то m_2 объясняющих переменных совместно оказывают существенное влияние на вариацию переменной *y,* и, следовательно, в этом случае все m_2 переменные нельзя исключать из модели.

При реализации первой ситуации ($F_k \le F_{f1f2a}$) факторы окончательно исключаются из модели.

7. ***Проверка адекватности модели.*** Данный этап анализа включает:

• *оценку значимости коэффициента детерминации.* Эта оценка необходима для решения вопроса: оказывают ли выбранные факторы влияние на зависимую переменную? Оценку значимости *Д* следует проводить, так как может сложиться такая ситуация, когда величина коэффициента детерминации будет целиком обусловлена случайными колебаниями в выборке, на основании которой он вычислен. Это объясняется тем, что величина *Д* существенно зависит от объема выборки.

Для оценки значимости коэффициента множественной детерминации используется следующая статистика:

$$F = \frac{Д \cdot (n - m - 1)}{m \cdot (1 - Д)}, \qquad (4.31)$$

которая имеет *F*-распределение с $f_1 = m$ и $f_2 = n - m - 1$ степенями свободы. Здесь $Д = R^2$, а *m* – количество учитываемых объясняющих переменных (факторов).

Значение статистики *F,* вычисленное по эмпирическим данным, сравнивается с табличным значением F_{f1f2a}. Критическое значение определяется по таблице Приложения 2 по заданному *a* и степеням свободы f_1 и f_2. Если $F < F_{f1f2a}$, то вычисленный коэффициент детерминации значимо отличается от 0, и, следовательно, включенные в регрессию переменные достаточно объясняют зависимую переменную, что позволяет говорить о значимости самой регрессии (модели);

• *проверку качества подбора теоретического уравнения.* Она проводится с использованием средней ошибки аппроксимации. Средняя ошибка аппроксимации регрессии определяется по формуле:

$$E = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - y_{iT}}{y_{iT}} \right) \cdot 100\%; \qquad (4.32)$$

• *вычисление специальных показателей,* которые применяются для характеристики воздействия отдельных факторов на результирующий показатель. Это коэффициент эластичности, который показывает, на сколько процентов в среднем изменяется функция с изменением аргумента на 1% при фиксированных значениях других аргументов:

$$Э_k = a_k \cdot \frac{\overline{x}_k}{\overline{y}}; \qquad (4.33)$$

доля влияния каждого фактора x_j в отдельности на вариацию y [11]:

$$g_j = \beta_j^2, \tag{4.34}$$

где β_j – коэффициент бета-фактора x_j.

Показатель g_j является мерой вариации результативного признака за счет изолированного влияния фактора x_j. Следует отметить, что система факторов, входящая в модель регрессии, - это не простая их сумма, так как система предполагает внутренние связи, взаимодействие составляющих ее элементов. Действие системы не равно арифметической сумме воздействий составляющих ее элементов. Поэтому необходимо определить показатель системного эффекта факторов η_S:

$$\eta_S = R^2 - \sum_{j=1}^{m} \beta_j^2 .$$

На основе анализа специальных показателей и значений парной корреляции x с y делают вывод, какие из главных факторов оказывают наибольшее влияние на y. После этого переходят к разработке организационно-технических мероприятий, направленных на улучшение значений этих факторов, с целью повышения (снижения) результативного показателя y.

8. ***Экономическая интерпретация.***

Результаты регрессионного анализа сравниваются с гипотезами, сформулированными на первом этапе исследования, и оценивается их правдоподобие с экономической точки зрения.

9. ***Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменой.***

Полученное уравнение регрессии находит практическое применение в прогностическом анализе. Прогноз получают путем подстановки в регрессию с численно оцененными параметрами значений факторов. Следует подчеркнуть, что прогнозирование результатов по регрессии лучше поддается содержательной интерпретации, чем простая экстраполяция тенденций, так как полнее учитывается природа исследуемого явления. Более подробно вопросы прогнозирования рассмотрены в работе [3].

Глава 5. Линейное программирование в решении оптимизационных задач

Оптимизационная задача – это экономико-математическая задача, которая состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции, причем значения переменных должны принадлежать некоторой области допустимых значений.

В самом общем виде задача математически записывается так:

$$U = f(X) \to \max; \qquad X \in W, \tag{5.1}$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$;

W – область допустимых значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$;

$f(X)$ – целевая функция.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение, т.е. указать $X_0 \in W$ такое, что $f(X_0) \geq f(X)$ при любом $X \in W$, или для случая минимизации – $f(X_0) \leq f(X)$ при любом $X \in W$.

Оптимизационная задача является неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача максимизации будет неразрешима, если целевая функция $f(X)$ не ограничена сверху на допустимом множестве W.

Методы решения оптимизационных задач зависят как от вида целевой функции $f(X)$, так и от строения допустимого множества W. Если целевая функция в задаче является функцией n переменных, то методы решения называют ***методами математического программирования.***

В математическом программировании принято выделять следующие основные задачи в зависимости от вида целевой функции $f(X)$ и от области W:

– задачи линейного программирования, если $f(X)$ и W линейны;

– задачи целочисленного программирования, если ставится условие целочисленности переменных $x_1, x_2, ..., x_n$;

– задачи нелинейного программирования, если форма $f(X)$ носит нелинейный характер.

5.1. Задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования называется задача исследования операций, математическая модель которой имеет вид:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min); \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i, \qquad i \in I, \qquad I \subseteq M = \{1,2,...,m\}; \tag{5.3}$$

$$\sum_{J=1}^{N} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i \in M; \tag{5.4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j \in J, \quad J \subseteq N = \{1,2,...,n\}. \tag{5.5}$$

При этом система линейных уравнений (5.3) и неравенств (5.4), (5.5), определяющая допустимое множество решений задачи *W,* называется ***системой ограничений задачи линейного программирования,*** а линейная функция *f(X)* называется ***целевой функцией*** или ***критерием оптимальности.***

В частном случае, если $I = \varnothing$, то система (5.3) - (5.4) состоит только из линейных неравенств, а если *I=M*, то из линейных уравнений.

Если математическая модель задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \to \min; \tag{5.6}$$

$$\sum_{J=1}^{N} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \tag{5.7}$$

$$b_i \ge 0, \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{5.8}$$

то говорят, что задача представлена в ***канонической форме.***

Любую задачу линейного программирования можно свести к задаче линейного программирования в канонической форме. Для этого в общем случае нужно уметь сводить задачу максимизации к задаче минимизации; переходить от ограничений неравенств к ограничениям равенств и заменять переменные, которые не подчиняются условию неотрицательности. Максимизация некоторой функции эквивалентна минимизации той же функции, взятой с противоположным знаком, и наоборот.

Правило приведения задачи линейного программирования к каноническому виду состоит в следующем:

1) если в исходной задаче требуется определить максимум линейной функции, то следует изменить знак и искать минимум этой функции;

2) если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на –1;

3) если среди ограничений имеются неравенства, то путем введения дополнительных неотрицательных переменных они преобразуются в равенства;

4) если некоторая переменная x_k не имеет ограничений по знаку, то она заменяется (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью между двумя новыми неотрицательными переменными:

$x_k = x'_k - x_l$, где l – свободный индекс, $x'_k \ge 0$. $x_l \ge 0$.

Пример. Приведение к канонической форме задачи линейного программирования:

$$\min L = 2x_1x_2 - x_3;$$
$$2x_2 - x_3 \le 5;$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \ge -1;$$
$$2x_1 - x_2 \le -3;$$
$$x_1 \le 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Решение. Введем в каждое уравнение системы ограничений выравнивающие переменные x_4, x_5, X_6. Система запишется в виде равенств, причем в первое и третье уравнения системы ограничений переменные x_4, x_6 вводятся в левую часть со знаком "+", а во второе уравнение вводится x_5 со знаком "–".

Итак:

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 5;$$
$$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = -1;$$
$$2x_1 - x_2 + x_6 = -3;$$
$$x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0, \quad x_6 \ge 0.$$

Свободные члены в канонической форме должны быть положительными, для этого два последних уравнения умножим на – 1:

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 5;$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1;$$
$$-2x_1 + x_2 - x_6 = 3.$$

В канонической форме записи задач линейного программирования все переменные, входящие в систему ограничений, должны быть неотрицательными. Допустим, что

$$x_1 = x_1' - x_7, \text{ где } x_1' \ge 0, \quad x_7 \ge 0.$$

Подставляя данное выражение в систему ограничений и в целевую функцию и записывая переменные в порядке возрастания индекса, получим задачу линейного программирования, представленную в канонической форме:

$$2x_2 - x_3 + x_4 = 5;$$
$$-x_1' - x_2 + x_3 + x_5 + x_7 = 1;$$
$$-2x_1' + x_2 - x_6 + 2x_7 = 3;$$
$$L_{\min} = 2x_1' + x_2 - x_3 - 2x_7;$$
$$x_1' \ge 0, \quad x_i \ge 0, \quad i = \overline{2,7}.$$

5.2. Примеры построения экономико-математических моделей задач линейного программирования

Рассмотрим процесс построения математических моделей задач линейного программирования на примерах.

Пример 5.1. Определение оптимального ассортимента продукции.

Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$, и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д.е. – для $П_1$ и 4 д.е. для $П_2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Процесс построения математической модели для решения поставленной задачи начинается с ответов на следующие вопросы (Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. – М.: Мир, 1985):

1. Для определения каких величин должна быть построена модель, т.е. как идентифицировать *переменные* данной задачи?

2. Какие *ограничения* должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, характерные для моделируемой системы?

3. В чем состоит *цель* задачи, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

Ответы на вышеперечисленные вопросы могут быть сформулированы для данной задачи так: фирме требуется определить объемы производства каждого вида продукции в тоннах, максимизирующие доход в д.е. от реализации продукции, с учетом ограничений на спрос и расход исходных продуктов.

Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$2x_1 + 3x_2 \le 9;$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 13;$$

$$x_2 \le 2; \quad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит $F = 3x_1 + 4x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значения F_{max}.

Рассмотренная задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени.

Пример 5.2. Использование мощностей оборудования.

Предприятие имеет m моделей машин различных мощностей. Задан план по времени и номенклатуре: T – время работы каждой машины; продукции j-го вида должно быть выпущено не менее N_j единиц.

Необходимо составить такой план работы оборудования, чтобы обеспечить минимальные затраты на производство, если известны производительность каждой i-й машины по выпуску j-го вида продукции b_{ij} и стоимость единицы времени, затрачиваемого i-й машиной на выпуск j-го вида продукции c_{ij}.

Другими словами, задача для предприятия состоит в следующем: требуется определить время работы i-й машины по выпуску j-го вида продукции x_{ij}, обеспечивающее минимальные затраты на производство при соблюдении ограничений по общему времени работы машин T и заданному количеству продукции N_j.

По условию задачи машины работают заданное время T, поэтому данное ограничение можно представить в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = T, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.9}$$

Ограничение по заданному количеству продукции выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} \geq N_j, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{5.10}$$

Задача решается на минимум затрат на производство:

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{5.11}$$

Необходимо также учесть неотрицательность переменных $x_{ij} \geq 0$.

Задача поставлена так, чтобы израсходовать все отведенное время работы машины, т.е. обеспечить полную загрузку машины. При этом количество выпускаемой продукции каждого вида должно быть по крайней мере не менее N_j. Однако в некоторых случаях не допускается превышение плана по номенклатуре, тогда ограничения математической модели изменяются следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq T, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{5.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij} = N_j, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{5.13}$$

$$x_{ij} \geq 0; \qquad Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{5.14}$$

Пример 5.3. Минимизация дисбаланса на линии сборки.

Промышленная фирма производит изделие, представляющее собой сборку из m различных узлов. Эти узлы изготавливаются на n заводах.

Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску j-го узла неодинакова и равна b_{ij}. Каждый i-й завод располагает максимальным суммарным ресурсом времени в течение недели для производства m узлов, равного величине T_i.

Задача состоит в максимизации выпуска изделий, что по существу эквивалентно минимизации дисбаланса, возникающего вследствие некомплектности поставки по одному или по нескольким видам узлов.

В данной задаче требуется определить еженедельные затраты времени (в часах) на производство j-го узла на i-м заводе, не превышающие в сумме временные ресурсы i-го завода и обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

Пусть x_{ij} – недельный фонд времени (в часах), выделяемый на заводе i для производства узла j. Тогда объемы производства узла j будут следующими:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_{ij}; \qquad j = \overline{1,n}. \tag{5.15}$$

Так как в конечной сборке каждый из комплектующих узлов представлен в одном экземпляре, количество конечных изделий должно

быть равно количеству комплектующих узлов, объем производства которых минимален:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}; \quad j=\overline{1,m}\right). \tag{5.16}$$

Условие рассматриваемой задачи устанавливает ограничение на фонд времени, которым располагает завод *i*.

Таким образом, математическая модель может быть представлена в следующем виде.

Максимизируем

$$Z=\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij}; \quad j=\overline{1,m}\right). \tag{5.17}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T, \quad i=\overline{1,n}. \tag{5.18}$$

$x_{ij} \ge 0$ для всех *i* и *j*.

Эта модель не является линейной, но ее можно привести к линейной форме с помощью простого преобразования. Пусть *Y* – количество изделий:

$$Y=\min\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij} = N_j; \quad j=\overline{1,m}\right). \tag{5.19}$$

Этому выражению с математической точки зрения эквивалентна следующая формулировка: максимизировать Z = *Y* при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_{ij} - Y; \quad j=\overline{1,m}. \tag{5.20}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le T, \quad i=\overline{1,n}. \tag{5.21}$$

$x_{ij} \ge 0$ для всех *i* и *j*; $Y \ge 0$

Пример 5.4. Задача составления кормовой смеси, или задача о диете [8].

Пусть крупная фирма (условно назовем ее "Суперрацион") имеет возможность покупать *m* различных видов сырья и приготавливать различные виды смесей (продуктов). Каждый вид сырья содержит разное количество питательных компонентов (ингредиентов).

Лабораторией фирмы установлено, что продукция должна удовлетворять по крайней мере некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности (полезности). Перед руководством фирмы стоит задача определить количество каждого *i*-го сырья, образующего смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу смеси и ее питательности.

Решение.

Введем условные обозначения:

x_i – количество *i*-го сырья в смеси;

m – количество видов сырья;

n – количество ингредиентов в сырье;

a_{ij} – количество ингредиента j, содержащегося в единице i-го вида сырья;

b_{ij} – минимальное количество ингредиента, содержащегося в единице смеси;

c_i - стоимость единицы сырья i;

q - минимальная общая масса смеси, используемая фирмой.

Задача может быть представлена в виде

$$Z_{\min} = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \tag{5.22}$$

при следующих ограничениях:

на общий расход смеси:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq q; \tag{5.23}$$

на питательность смеси:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq b_j \sum_{i=1}^{m} x_i, \quad j = \overline{1,n}; \tag{5.24}$$

на неотрицательность переменных:

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.25}$$

Пример 5.5. Задача составления жидких смесей.

Еще один класс моделей, аналогичных рассмотренным выше, возникает при решении экономической проблемы, связанной с изготовлением смесей различных жидкостей с целью получения пользующихся спросом готовых продуктов.

Представим себе фирму, торгующую различного рода химическими продуктами, каждый из которых является смесью нескольких компонентов. Предположим, что эта фирма планирует изготовление смесей m видов. Обозначим подлежащее определению количество литров i-го химического компонента, используемого для получения j-го продукта, через x_{ij}. Будем предполагать, что

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Первая группа ограничений относится к объемам потребляемых химических компонентов:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq S_i, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{5.26}$$

где S_i – объем i-го химического компонента, которым располагает фирма в начале планируемого периода.

Вторая группа ограничений отражает требование, заключающееся в том, чтобы запланированный выпуск продукции хотя бы в минимальной степени удовлетворял имеющийся спрос на каждый из химических продуктов, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq D_j, \qquad j = \overline{1,m}. \tag{5.27}$$

где D_j – минимальный спрос на продукцию y в течение планируемого периода.

Третья группа ограничений связана с технологическими особенностями, которые необходимо принимать во внимание при приготовлении смеси, например, простое ограничение, определяемое некоторыми минимально допустимыми значениями, отношения между объемами двух химических компонентов в процессе получения продукта j:

$$\frac{x_{ij}}{x_{i+1,j}} \geq r, \text{ или } x_{ij} - r \cdot x_{i+1,j} \geq 0.$$

где r – некоторая заданная константа.

Обозначив через P_{ij} доход с единицы продукции x_{ij}, запишем целевую функцию:

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \cdot x_{ij}. \tag{5.28}$$

Пример 5.6. Задача о раскрое или о минимизации обрезков.

Данная задача состоит в разработке таких технологических планов раскроя, при которых получается необходимый комплекс заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.

Например, продукция бумажной фирмы выпускается в виде бумажных рулонов стандартной ширины L. По специальным заказам потребителей фирма поставляет рулоны других размеров, для этого производится разрезание стандартных рулонов. Типичные заказы на рулоны нестандартных размеров могут включать m видов шириной $l_i (i = \overline{1,m})$. Известна потребность в нестандартных рулонах каждого вида, она равна l_i. Возможны n различных вариантов построения технологической карты раскроя рулонов стандартной ширины L на рулоны длиной l_i.

Обозначим через a_{ij} количество рулонов i-го вида, получаемых при раскрое единицы стандартного рулона по j-му варианту. При каждом варианте раскроя на каждый стандартный рулон возможны потери, равные P_j. К потерям следует относить также избыточные рулоны нестандартной длины l_i, получаемые при различных вариантах раскроя y_{ij}, $j = \overline{1,n}$.

В качестве переменных следует идентифицировать количество стандартных рулонов, которые должны быть разрезаны при j-м варианте раскроя. Определим переменную следующим образом: x_j - количество стандартных рулонов, разрезаемых по варианту $_j$, $j = \overline{1,n}$.

Целевая функция
минимум отходов при раскрое

$$Z_{\max} = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \ . \qquad (5.29)$$

Ограничение на удовлетворение спроса потребителя

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \qquad x_j \geq 0, \qquad y_{ij} \geq 0 \, . \qquad (5.30)$$

Пример 5.7. Многосторонний коммерческий арбитраж (Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х кн. – М.: Мир, 1985).

В сфере деятельности, связанной с валютными и биржевыми операциями, а также коммерческими сделками контрактного характера, возможны различного рода трансакции, позволяющие извлекать прибыль на разнице в курсе валют. Такого рода трансакции называются ***коммерческим арбитражем.***

Представим себе коммерсанта (условно назовем его *N),* имеющего возможность реализовать многосторонний коммерческий арбитраж. Предположим, что число валютных рынков, вовлеченных в трансакционную деятельность коммерсанта *N*, равняется **шести**, а максимальное число возможных трансакций равняется **девяти**. Подробные данные, характеризующие рассматриваемую задачу, приведены в табл. 5.2.

При трансакции x_1 продажа единицы валютного номинала (ценных бумаг) **II** позволяет приобрести r_{11} единиц валютного номинала **I**. При трансакции x_7 взамен единицы валютного номинала **I** можно получить r_{37} единиц валютного номинала **III** и r_{67} единиц валютного номинала **VI**. Остальные трансакции расшифровываются аналогично. Значения r_{ij} могут быть дробными. Заметим, что при любой трансакции x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5) каждый из валютных номиналов можно обменять на валютный номинал **I**. Следует обратить внимание на правило выбора знака перед показателями в табл. 5.2. Чтобы отличать куплю от продажи, будем соответственно использовать знаки "плюс" и "минус" перед показателями, характеризующими данную трансакцию.

Таблица 5.2

Многосторонний коммерческий арбитраж

Валютный номинал	**Тип трансакции**									**Возможность рынка**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	
I	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	-1	-1			≥ 0
II	-1					r_{26}			r_{29}	≥ 0
III		-1					r_{37}	r_{38}		≥ 0
IV			-1					-1		≥ 0
V				-1				r_{58}		≥ 0
VI					-1		r_{67}		-1	≥ 0
Размер трансакции	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_6	x_9	

Рассмотрим идеализированный случай, когда все трансакции коммерсанта N выполняются одновременно. Ограничения определяются единственным требованием – трансакция возможна лишь при условии, если коммерсант N располагает наличными ценными бумагами. Другими словами, количество проданных ценных бумаг не должно превышать количество приобретенных. Данные ограничения имеют вид

$$r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 \geq 0;$$
$$-x_1 + r_{26}x_6 + r_{29}x_9 \geq 0;$$
$$-x_2 + r_{37}x_7 + r_{38}x_8 \geq 0;$$
$$-x_3 - x_8 + r_{49}x_9 \geq 0;$$
$$-x_4 + r_{58}x_8 \geq 0;$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,9}.$$

Пусть целевая функция представляет собой чистый доход, выраженный в единицах валютного номинала **I**, т.е. задача состоит в том, чтобы

$$Z_{\max} = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + r_{13}x_3 + r_{14}x_4 + r_{15}x_5 - x_6 - x_7 .$$

Пример 5.8. Транспортная задача.

Имеются три поставщика и четыре потребителя однородной продукции. Известны затраты на перевозку груза от каждого поставщика каждому потребителю. Обозначим их c_{ij}, $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$. Запасы грузов у поставщиков равны c_{ij}, $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,4}$. Известны потребности каждого потребителя b_j, $j = \overline{1,4}$. Будем считать, что суммарные потребности равны суммарным запасам:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j-1}^{4} b_j .$$

Требуется составить такой план перевозок, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты при полном удовлетворении потребностей.

Введем переменные x_{ij} – количество груза, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю.

Ограничения задачи выглядят следующим образом:

- потребности всех потребителей должны быть удовлетворены полностью:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = b_2; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = b_3; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = b_4; \end{cases} \tag{5.31}$$

или в общем виде:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,4};$$

- груз поставщика должен быть вывезен полностью:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a_2; \\ x_{31} + x_{232} + x_{33} + x_{34} = b_3; \end{cases} \tag{5.32}$$

или в общем виде:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = a_i, \ \ i = \overline{1,3};$$

- условие неотрицательности переменных:

$x_{ij} \geq 0, \ \ i = \overline{1,3}, \ \ j = \overline{1,4}$.

Целевая функция – минимизировать суммарные затраты на перевозку:

$$Z_{\min} = \sum_{i}^{3} \sum_{j}^{4} c_{ij} x_{ij} \ . \tag{5.33}$$

Количество поставщиков и потребителей в общем случае может быть произвольным (≥ 2).

Мы рассмотрели девять примеров типовых задач линейного программирования. Обобщая их, можно сделать следующие выводы.

1. Ограничения в задачах линейного программирования могут быть выражены как равенствами, так и неравенствами.

2. Линейная функция может стремиться как к максимуму, так и к минимуму.

3. Переменные в задачах всегда неотрицательны.

Напомним, что от любой из вышеперечисленных задач можно перейти к канонической (основной) задаче линейного программирования.

5.3. Графические методы решения задач линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для:

– решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;

– решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Запишем задачу линейного программирования с двумя переменными:

- целевая функция:

$$Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2; \tag{5.34}$$

- ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}; \qquad (5.35)$$

$$x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0. \qquad (5.36)$$

Каждое из неравенств (5.35) - (5.36) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $(i = \overline{1,m})$; $x_1 - 0$; $x_2 = 0$. В том случае, если система неравенств (5.35) - (5.36) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений является выпуклое множество, которое называется *многоугольником* решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Областью допустимых решений системы неравенств (5.35)-(5.36) *может быть:*

– выпуклый многоугольник;
– выпуклая многоугольная неограниченная область;
– пустая область;
– луч;
– отрезок;
– единственная точка.

Целевая функция (5.34) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение *Z*.

Вектор $\overline{C} = (c_1; c_2)$ с координатами c_1 и c_2, перпендикулярный к этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания *Z*, а противоположный вектор – направление убывания *Z*.

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы неравенств (5.35)-(5.36) и семейство параллельных прямых (5.34), то задача определения максимума функции *Z* сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая из семейства *Z* = *const* и которая соответствует наибольшему значению параметра *Z*.

Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для определения данной вершины построим линию уровня $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $C = (c_1; c_2)$, и будем передвигать ее в направлении вектора $\overline{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не коснется последней крайней (угловой) точки многоугольника решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (5.34)-(5.36), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 5.1-5.4. Рис. 5.1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке ***A***. Из рис. 5.2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка ***AB***.

На рис. 5.3 изображен случай, когда максимум недостижим, а на рис. 5.4 – случай, когда система ограничений задачи несовместима.

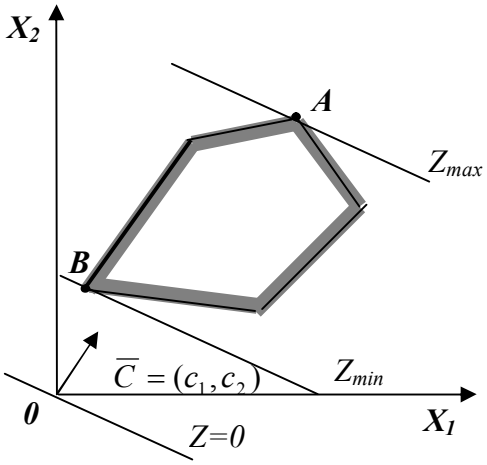


Рис. 5.1. Оптимум функции *Z* достижим в точке *A*

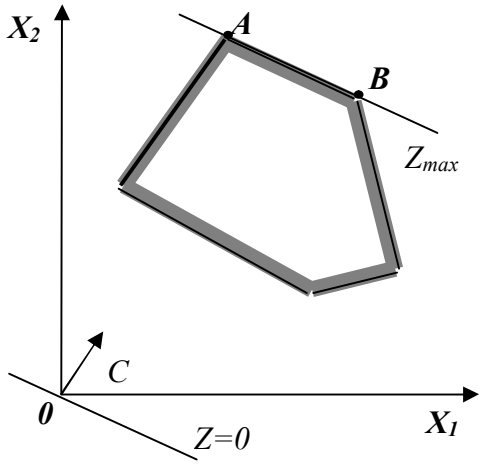


Рис. 5.2. Оптимум функции *Z* достижим в любой точке отрезка *AB*

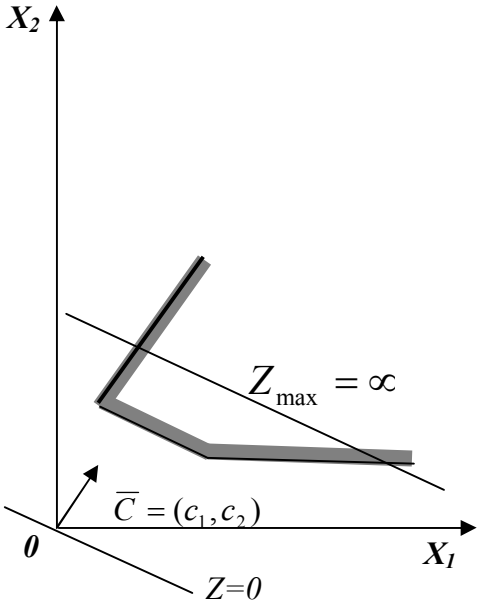


Рис. 5.3. Оптимум функции *Z* недостижим

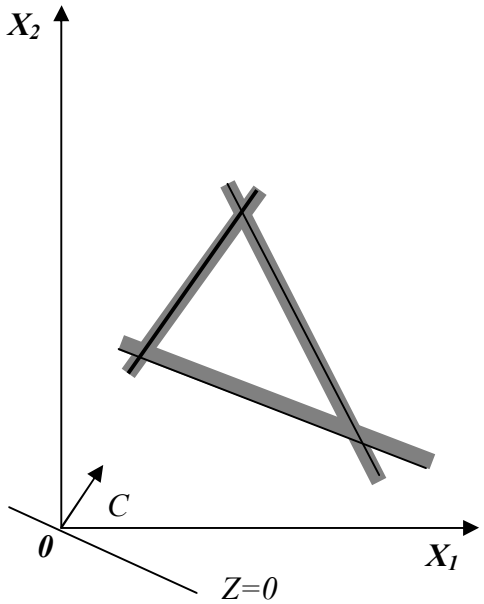


Рис. 5.4. Область допустимых решений – пустая область

Отметим, что нахождение минимального значения Z при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня Z передвигается не в направлении вектора $\overline{C} = (c_1; c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Для практического решения задачи линейного программирования (5.34)-(5.36) *на основе ее геометрической интерпретации необходимо следующее.*

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (5.35)-(5.36) знаков неравенств на знаки равенств.
2. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Определить многоугольник решений.
4. Построить вектор $\overline{C} = (c_1; c_2)$.
5. Построить прямую $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору C.
6. Передвигать прямую $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ в направлении вектора C, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность функции сверху на множестве планов.

Определить координаты точки максимума функции и вычислить значение целевой функции в этой точке.

Пример 5.9. Рассмотрим решение задачи об ассортименте продукции (Пример 5.2) геометрическим способом.

Решение.

Построим многоугольник решений (рис. 5.5). Для этого в системе координат X_10X_2 на плоскости изобразим граничные прямые:

$$2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad (l_1);$$
$$3x_1 + 2x_2 = 13 \qquad (L_2);$$
$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (L_3);$$
$$x_2 = 2 \qquad (L_4).$$

Взяв какую-либо точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рис. 5.5 показаны стрелками. Областью решений является многоугольник ***OABCD***.

Для построения прямой $Z = 3x + 4x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\overline{C} = (3;4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рис. 5.5 следует, что по отношению к

многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке *C*, где функция принимает максимальное значение. Точка *C* лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Оптимальный план задачи x_1 = 2,4; x_2=1,4. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим: $Z_{\max} = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}4 = 12{,}8$.

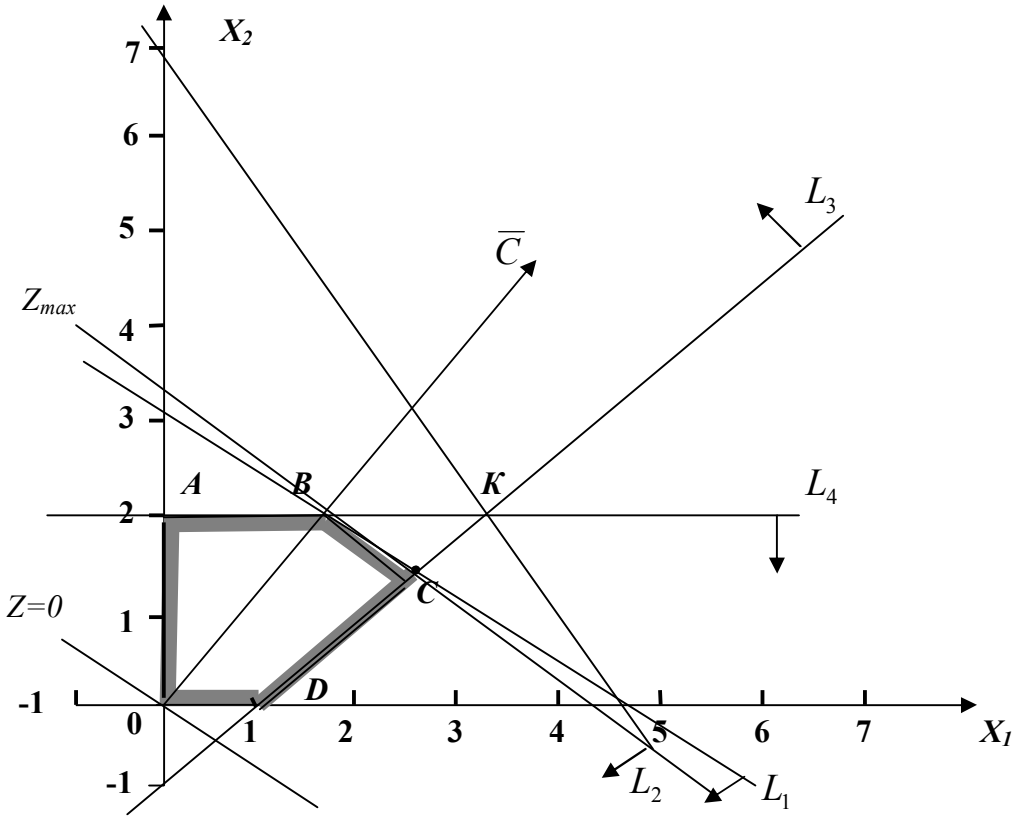


Рис. 5.5. Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., а продукции $П_2$ – 1,4 ед. Доход, получаемый в этом случае, составит: Z = 12,8 д.е.

Геометрическим способом можно также решать задачи линейного программирования с числом переменных более двух. Для этого исходную задачу преобразуют ***методом Жордана-Гаусса.***

Пример 5.10.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4.$$

Используя метод Жордана-Гаусса, произведем два полных исключения x_1 и x_4:

$$\left|\begin{array}{cccc|c|c} \overline{1} & -1 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 3 & 11 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -1 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -13 & \overline{10} & -3 & -1 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 1{,}4 & 0 & 1{,}4 & 3{,}2 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}3 & 1 & -0{,}3 & -0{,}1 \end{array}\right|.$$

В результате приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 1{,}4x_3 = 1{,}4 \\ 0{,}5x_2 - 1{,}3x_3 + x_4 = -0{,}3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 - 1{,}4x_3 \\ x_4 = -0{,}3 - 0{,}5x_2 + 1{,}3x_3. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в линейную функцию Z и отбрасывая в последней системе базисные переменные, получим задачу, выраженную только через свободные неизвестные x_1 и x_3. Найдем максимальное значение линейной функции

$$Z = 5{,}9 - 5{,}9x_3 - 1{,}5x_2$$

при следующих ограничениях:

$$x_3 \le 1;$$

$$0{,}5x_2 - 1{,}3x_3 \le 0{,}3.$$

Построим многоугольник решений и линейную функцию в системе координат $X_2 0 X_3$ (рис. 5.6). Согласно рис. 5.6, линейная функция принимает максимальное значение в точке ***A***, которая лежит на пересечении прямых L_2 и X_2=0. Ее координаты (0;0,23).

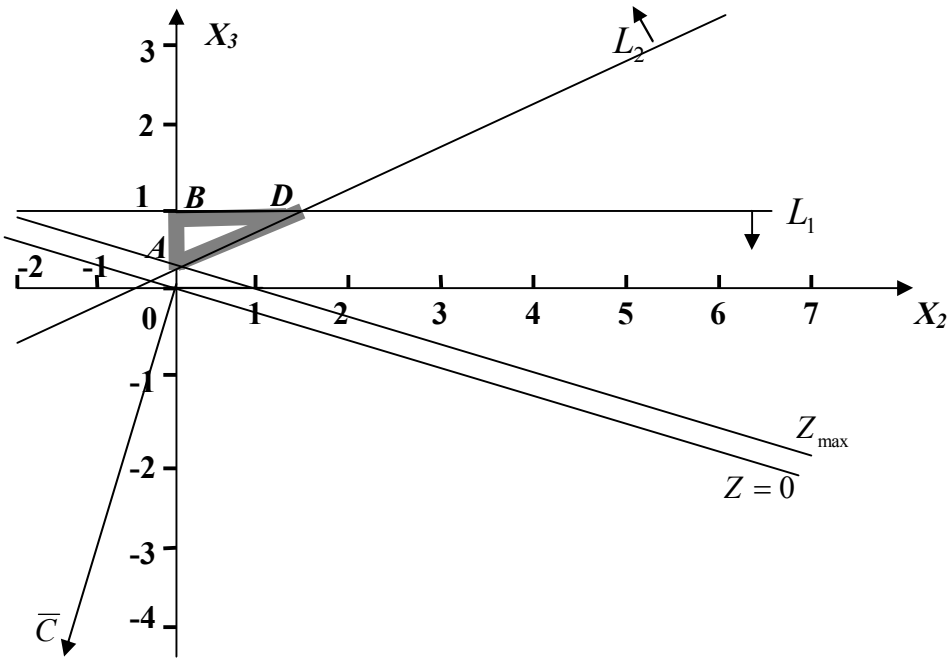


Рис. 5.6. Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования

Максимальное значение функции

$$Z = 5{,}9 - 5{,}9 \cdot 0{,}23 - 1{,}5 \cdot 0 - 4{,}54.$$

Для отыскания оптимального плана исходной задачи подставляем в преобразованную систему x_2 и x_3. Окончательно получаем $\boldsymbol{X}$=(1,078; 0; 0,23; 0,001).

5.4. Симплекс-метод

5.4.1. Общая идея симплекс-метода

Для начала работы требуется, чтобы заданная система ограничений выражалась равенствами, причем в этой системе ограничений должны быть выделены базисные неизвестные. Решение задачи при помощи симплекс-метода распадается на ряд шагов. На каждом шаге от данного базиса *Б* переходят к другому, новому базису $Б'$ с таким расчетом, чтобы значение функции *Z* уменьшалось, т.е. $Z_{Б'} \le Z_Б$. Для перехода к новому базису из старого базиса удаляется одна из переменных и вместо нее вводится другая из числа свободных. После конечного числа шагов находится некоторый базис $Б^{(K)}$, для которого $Z_{Б^{(K)}}$ есть искомый минимум для линейной функции *Z*, а соответствующее базисное решение является оптимальным, либо выясняется, что задача не имеет решения.

5.4.2. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим систему ограничений и линейную форму вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}; \qquad (5.37)$$

$$Z_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n;. \qquad (5.38)$$

$$x_1 \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (5.39)$$

Используя метод Жордана – Гаусса, приведем записанную систему к виду, где выделены базисные переменные. Введем условные обозначения:

$x_1, x_2, \ldots, x_r$ – базисные переменные;

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ - свободные переменные.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + a_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{1n}x_n) \\ x_2 = \beta_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + a_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + a_{2n}x_n) \\ \ldots \\ x_r = \beta_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + a_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + a_{1m}x_n) \end{cases}; \qquad (5.40)$$

$$Z_{\min} = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \gamma_{r+2}x_{r+2} + \ldots + \gamma_n x_n). \quad (5.41)$$

По последней системе ограничений и целевой функции Z построим табл. 5.3.

Таблица 5.3

Симплекс-таблица

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_{r+1}	…	x_{r+1}
x_1	β_1	a_{1r+1}	a_{1r+2}	…	a_{1n}
x_2	β_2	a_{2r+1}	a_{2r+2}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	a_{rr+1}	a_{rr+2}	…	a_{rn}
Z_{min}	γ_0	$\gamma_{r=1}$	γ_{r+2}	…	γ_n

Данная таблица называется симплекс-таблицей. Все дальнейшие преобразования связаны с изменением содержания этой таблицы.

Алгоритм симплекс-метода сводится к следующему.

1. В последней строке симплекс-таблицы находят наименьший положительный элемент, не считая свободного члена. Столбец, соответствующий этому элементу, считается разрешающим.

2. Вычисляют отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс-отношение). Находят наименьшее из этих симплекс-отношений, оно соответствует разрешающей строке.

3. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент.

4. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к положительным элементам последней строки симлекс-таблицы.

5. После нахождения разрешающего элемента переходят к следующей таблице. Неизвестные переменные, соответствующие разрешающей строке и столбцу, меняют местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной и наоборот. Симплекс-таблица преобразована следующим образом (табл. 5.4).

6. Элемент табл. 5.4, соответствующий разрешающему элементу табл. 5.3, равен обратной величине разрешающего элемента.

7. Элементы строки табл. 5.4, соответствующие элементам разрешающей строки табл. 5.3, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 5.3 на разрешающий элемент.

Таблица 5.4.

Преобразование симплекс-таблицы

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_{r+1}	x_1	…	x_n
x_{r+2}	β_1/a_{1r+2}	a_{1r+1}/a_{1r+2}	$1/a_{1r+2}$	…	a_{1n}/a_{1r+2}
x_2			$-a_{2r+2}/a_{1r+2}$	…	
…	…	…	…	…	…
x_r	β_r	a_{rr+1}	$-a_{rr+2}/a_{1r+2}$	…	a_{rn}
Z_{min}			$-\gamma_{r+2}/a_{1r+2}$	…	

8. Элементы столбца табл. 5.4, соответствующие элементам разрешающего столбца табл. 5.3, получаются путем деления соответствующих элементов табл. 5.3 на разрешающий элемент и берутся с противоположным знаком.

9. Остальные элементы вычисляются по *правилу прямоугольника:* мысленно вычерчиваем прямоугольник в табл. 5.3, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом, а другая – с элементом, образ которого мы ищем; остальные две вершины определяются однозначно. Тогда искомый элемент из табл. 5.4 будет равен соответствующему элементу табл. 5.3 минус дробь, в знаменателе которой стоит разрешающий элемент, а в числителе – произведение элементов из двух неиспользованных вершин прямоугольника.

10. Как только получится таблица, в которой в последней строке все элементы отрицательны, считается, что минимум найден. Минимальное значение функции равно свободному члену в строке целевой функции, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных. Все свободные переменные в этом случае равны нулю.

11. Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача не имеет решений (минимум не достигается).

Пример 5.11. Решение задачи симплекс-методом:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5.$$

Приведем задачу к виду, допускающему применение симплекс-алгоритма:

$$x_3 = 1 - (-x_1 + x_2);$$

$$x_4 = 1 - (x_1 - x_2);$$

$$x_5 = 2 - (x_1 + x_2).$$

Подставим в выражение $Z_{\max}$ величины x_3, x_4, x_5:

$$Z_{\max} = 6x_1 - 7x_2 + 3.$$

По алгоритму целевая функция должна стремиться к минимуму:

$$Z_{\min} = -Z_{\max} = -6x_1 + 7x_2 - 3 = -3 - (6x_1 - 7x_2).$$

Составим симплекс-таблицу:

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_1	x_2
x_3	1	-1	1
x_4	1	$\boxed{1}$	-1
x_5	2	1	1
Z_{min}	-3	6	-7

Разыскиваем в последней строке наименьший положительный элемент, в нашем примере он равен **+6**, первый столбец коэффициентов будет разрешающим. Определим отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Минимальное симплекс-отношение равно **1**. Разрешающий элемент находится на пересечении строки переменной x_4 и столбца $-x_1$.

Переходим к следующей таблице, используя правило прямоугольника:

Свободные неизвестные / Базисные неизвестные	Свободный член	x_1	x_2
x_3	2	1	0
x_4	1	1	-1
x_5	1	-1	2
Z_{min}	-9	-6	-1

В последней строке нет положительных элементов, следовательно, оптимальное решение найдено: $Z_{\min} = -9$; $X = (0;0;2;1;1)$; $Z_{\max} = -Z_{\min} = 9$.

5.5. Задания для самостоятельной работы по построению математических моделей задач линейного программирования

Задание 5.1. Автотранспортному предприятию (АТП) необходимо освободить из-под груза складские помещения клиента. Вывоз груза следует осуществить в два рейса колоннами автомобилей. Условия перевозки требуют, чтобы в составе каждой колонны, предназначенной для вывоза груза в первый район, было **8** автомобилей **ЗИЛ-131** и **8** автомобилей **ЗИЛ-130**; в колоннах второго рейса **8** автомобилей **ЗИЛ-130** и **16** – **МАЗ-500**. Каждая из колонн может сделать за сутки одинаковое количество поездок. Парк подвижного состава АТП состоит из **32** автомобилей **ЗИЛ-131** грузоподъемностью **3** т, **48** автомобилей **ЗИЛ-130**

грузоподъемностью **4** т, **48** автомобилей **МАЗ-500** грузоподъемностью **7,5** т.

Определите количество колонн, которое нужно направить в каждый район, чтобы перевезти наибольшее количество груза.

Задание 5.2. Из пункта **А** в пункт **В** ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок следующие:

Поезда	**Количество вагонов в поезде**				
	багажный	**почтовый**	**плацкарт**	**купейный**	**мягкий**
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	-	8	4	1
Число пассажиров	-	-	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

Задание 5.3. Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на **17**, **12** и **32** т. Овощехранилища имеют соответственно **20**, **20**, **15** и **25** т. Тарифы (в д.е. за 1 т) указаны в следующей таблице:

Овощехранилища	**Магазины**		
	1	**2**	**3**
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Задание 5.4. Имеются два склада готовой продукции: $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ с запасами однородного груза **200** и **300** т. Этот груз необходимо доставить трем потребителям: $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{B_3}$ в количестве **100**, **150**, **250** т соответственно. Стоимость перевозки 1т груза из склада $\mathbf{A_1}$ потребителям $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ и $\mathbf{B_3}$ равна **5**, **3**, **6** д.е., а из склада $\mathbf{A_2}$ тем же потребителям – **3**, **4**, **2** д.е. соответственно.

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Задание 5.5. При откорме каждое животное должно получить не менее **9** ед. белков, **8** ед. углеводов и **11** ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице:

Питательные вещества	**Количество единиц питательных веществ на 1 кг**	
	корма 1	**корма 2**
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида – **4** д.е., второго – **6** д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Задание 5.6. Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь – **100** ед., труд – **120** ед., тяга – **80** ед. Хозяйство производит четыре вида продукции $\mathbf{П_1}$, $\mathbf{П_2}$, $\mathbf{П_3}$, $\mathbf{П_4}$. Организация производства характеризуется следующей таблицей:

Продукция	**Затраты на 1 ед. продукции**			**Доход от единицы продукции**
	площадь	**труд**	**тяга**	
$П_1$	2	2	2	1
$П_2$	3	1	3	4
$П_3$	4	2	1	3
$П_4$	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Задание 5.7. Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовления трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа – **3** т, проволоки – **18** т. На один трансформатор первого вида расходуется **5** кг железа и **3** кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуется **3** кг железа и **2** кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль **3** д.е., второго – **4** д.е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Задание 5.8. Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей ниже таблице.

За 1 ц ржи совхоз получает **2** д.е., за 1 ц пшеницы – **2,8** д.е., за 1 ц кукурузы – **1,4** д.е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее **1900** т ржи, **158000** т пшеницы и **30000** т кукурузы?

Посевы	**Массивы**		
	I	**II**	**III**
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруза	30	35	25

Задание 5.9. Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. Данные об организации процессов перевозок приведены в таблице.

Тип самолета	**Число самолетов, ед.**	**Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям, ед.**				**Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям, д.е.**			
		I	**II**	**III**	**IV**	**I**	**II**	**III**	**IV**
1	50	15	10	20	50	15	20	25	40
2	20	20	25	10	10	70	28	15	45
3	30	35	30	30	45	40	70	50	65

Распределите самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных затратах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее **300**, **200**, **1000**, **500** ед. груза.

Задание 5.10. Имеются четыре оперативные базы и три цели. В силу различия в типах самолетов и высоте полета масса бомб, доставляемых с любой базы к любой цели, определяется по следующей таблице:

База	**Цель**		
	I	**II**	**III**
1	8	6	5
2	6	6	6
3	10	8	4
4	8	6	4

Дневная интенсивность каждой базы составляет **150** самолетовылетов в день. На каждую цель необходимо организовать **200** самолетовылетов в день. Определите план вылетов с каждой базы к каждой цели, дающий максимальную общую массу бомб, доставляемых к целям.

Задание 5.11. Из трех продуктов – **I, II, III** составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее **6** ед. химического вещества **A**, **8** ед. – вещества **B** и не менее **12** ед. вещества **C**. Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

Продукт	**Содержание химического вещества в 1 ед. продукции**			**Стоимость 1 ед. продукции**
	A	**B**	**C**	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте наиболее дешевую смесь.

Задание 5.12. В институте проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному студенту дано следующее поручение:

- купить акварельной краски по цене **30** д.е. за коробку, цветные карандаши по цене **20** д.е. за коробку, линейки по цене **12** д.е., блокноты по цене **10** д.е.;
- красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов - столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не менее **300** д.е.

В каком количестве студент должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

Задание 5.13. Заводы № **1, 2, 3** производят однородную продукцию в количестве соответственно **500**, **400** и **510** единиц. Себестоимость производства единицы продукции на заводе № **1** составляет **25** д.е., на заводе № **2** – **20** д.е., на заводе № **3** – **23** д.е. Продукция отправляется в пункты А, В, С, потребности которых равны **310**, **390** и **450** единицам. Стоимости перевозок 1 ед. продукции заданы матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Составьте оптимальный план перевозок продукции при условии, что коммуникации между заводом № **2** и пунктом **А** не позволяют пропускать в рассматриваемый период более **250** единиц продукции.

Задание 5.14. Цех выпускает три вида деталей – **А**, **В**, **С**. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующей таблицей:

Продукт	**Длительность обработки детали, мин.**			**Фонд времени**
	А	**В**	**С**	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпускная цена за одну деталь	30	32	30	

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Задание 5.15. Предприятие должно выпускать два вида продукции – **А** и **В**, используя при этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице:

Станок	**Трудоемкость на 1 ед. продукции**		**Фонд времени**
	А	**В**	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д.е.)	2	3	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Задание 5.16. На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется следующей таблицей.

Ресурсы	**Расход материалов на производство одной запасной части, кг**			**Запас ресурсов, кг**
	1	**2**	**3**	
I	5	5	2	1200
II	4	-	3	300
III	-	2	4	800
Прибыль от реализации 1 зап. части (д.е.)	5	8	6	

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Задание 5.17. Имеются три специализированные мастерские по ремонту двигателей. Их производственные мощности равны соответственно **100**, **700**, **980** ремонтов в год. В пяти районах, обслуживаемых этими мастерскими, потребность в ремонте равна соответственно **90**, **180**, **150**, **120**, **80** двигателей в год. Затраты на перевозку одного двигателя из районов к мастерским следующие:

Районы	**Мастерские**		
	1	**2**	**3**
1	4,5	3,7	8,3
2	2,1	4,3	2,4
3	7,5	7,1	4,2
4	5,3	1,2	6,2
5	4,1	6,7	3,1

Спланируйте количество ремонтов каждой мастерской для каждого из районов, минимизирующее суммарные транспортные расходы.

Задание 5.18. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: **400** тыс. л алкилата, **250** тыс. л крекинг-бензина, **350** тыс. л бензина прямой перегонки и **100** тыс. л изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин **А-2**:**3**:**5**:**2**, бензин **В-3:1:2:1**, бензин **С-2:2:1:3**. Стоимость **1** тыс. л указанных сортов бензина характеризуется числами **120** д.е., **100** д.е., **150** д.е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

Задание 5.19. Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием **А** – в течение **3** мин.,

оружием **Б** – в течение **5** мин., оружием **В** – в течение **4** мин. Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия **А** в течение **3** мин., оружия **Б** в течение **2** мин., оружия **В** в течение **4** мин. общее количество залпов не должно превышать **15**. При применении оружия **А** в течение **2** мин. и оружия **В** в течение **3** мин. общее количество залпов не должно превышать **8** ед. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием **В** за **1** мин. было больше, чем **5** ед.

Рассчитайте темп стрельбы (количество залпов в 1 мин.) всеми видами оружия, при котором общее количество залпов в ударе будет наибольшим.

Задание 5.20. Имеется **5** ракет и **5** целей. Вероятность поражения цели каждой из ракет задана в следующей таблице:

Ракеты	**Цели**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,12	0,02	0,5	0,43	0,15
2	0,71	0,18	0,81	0,05	0,26
3	0,84	0,76	0,26	0,37	0,52
4	0,22	0,45	0,83	0,81	0,65
5	0,49	0,02	0,50	0,26	0,37

Распределите ракеты по целям так, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным.

Задание 5.21. Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов **I** и **II** разрядов. Соревнования проводятся по бегу, прыжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать **5** спортсменов, в прыжках в длину – **8** спортсменов, а в прыжках в высоту – не более **10**. Количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в следующей таблице:

Разряд	**Бег**	**Прыжки в высоту**	**Прыжки в длину**
I	4	5	5
II	2	3	3

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде **I** разряд имеют только **10** спортсменов.

Задание 5.22. Предприятию задана месячная программа на изготовление четырех типов изделий в количествах соответственно **5000**, **2000**, **3000** и **1800** шт. На предприятии имеются три группы станков с различной производительностью. Суммарное допустимое время для каждой группы станков составляет соответственно **800**, **1000**, **1500** час. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице:

№ группы станков	Нормы времени на изготовление одного изделия, час.				Издержки на изготовление одного изделия, д.е.			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
1	0,5	0,15	0,4	0,6	0,12	0,2	0,3	0,25
2	0,4	0,12	0,2	0,5	0,16	0,14	0,35	0,2
3	0,42	0,14	0,35	0,45	0,17	0,25	0,4	0,3

Распределите изделия по станкам так, чтобы месячная программа была выполнена при наименьших издержках.

Задание 5.23. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется **10 000** клеток. В одной клетке могут быть либо **2** лисы, либо **1** песец. По плану на ферме должно быть не менее **3000** лис и **6000** песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма – **4** ед., а каждому песцу – **5** ед. Ферма ежедневно может иметь не более **200 000** единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль **10** д.е., а от реализации одной шкурки песца – **5** д.е.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

Задание 5.24. Найдите оптимальное распределение трех видов механизмов, имеющихся в количествах **45**, **20** и **35**, между четырьмя участками работ, потребности которых соответственно равны **10**, **20**, **30**, **40** при следующей матрице производительности:

$$W = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 5.25. Имеются два элеватора, в которых сосредоточено соответственно **4200** и **1200** т зерна. Зерно необходимо перевезти трем хлебозаводам в количестве **1000**, **2000** и **1600** т каждому. Расстояние от элеватора до хлебозаводов указано в следующей таблице:

Элеваторы	Хлебозаводы		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку **1** т продукта на **1** км составляют **25** д.е. Спланируйте перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

Задание 5.26. Из двух сортов бензина образуются две смеси – **А** и **В**. Смесь **А** содержит бензина **60**% 1-го сорта и **40**% 2-го сорта; смесь **В** – **80**% 1-го сорта и **20**% 2-го сорта. Цена **1** кг смеси **А** – **10** д.е., а смеси **В** – **12** д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина **50** т 1-го сорта и **30** т 2-го сорта.

Задание 5.27. Имеются две почвенно-климатические зоны, площади которых соответственно равны **0,8** и **0,6** млн га. Данные об урожайности зерновых культур приведены в следующей таблице:

Зерновые культуры	**Урожайность (ц/га)**		**Стоимость 1 ц, д.е.**
	1-я зона	**2-я зона**	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Определите размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

Задание 5.28. На строительство четырех объектов кирпич поступает с трех заводов. Заводы имеют на складах соответственно **50**, **100** и **50** тыс. шт. кирпича. Объекты требуют соответственно **50**, **70**, **40**, **40** тыс. шт. кирпича. Тарифы (в д.е./тыс. шт.) приведены в следующей таблице:

Заводы	**Объекты**			
	1	**2**	**3**	**4**
1	2	6	2	3
2	5	2	1	7
3	4	5	7	8

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Задание 5.29. Для полива различных участков сада, на которых растут сливы, яблони, груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно **180, 90** и **40** ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно **100, 120** и **90** ведер воды. Расстояния (в метрах) от колодцев до участков сада указаны в следующей таблице:

Колодцы	**Участки**		
	Сливы	**Яблони**	**Груши**
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	40	39

Как лучше организовать полив?

Задание 5.30. На заводе выпускают изделия четырех типов. От реализации 1 ед. каждого изделия завод получает прибыль соответственно **2**, **1**, **3**, **5** д.е. На изготовление изделий расходуются ресурсы трех типов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в следующей таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов на ед. изделия				Запасы ресурсов
	I	II	III	IV	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Спланируйте производство изделий так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

5.6. Задания для самостоятельной работы по решению задач линейного программирования графическим методом

Во всех заданиях $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

Задание 5.31. $W = x_1 - 5x_2 \to \min; \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4. \end{cases}$

Задание 5.32. $W = x_1 - 4x_2 \to \min; \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 16. \end{cases}$

Задание 5.33. $F = x_1 + x_2 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20. \end{cases}$

Задание 5.34. $W = 2x_1 + 2x_2 \to \min; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1. \end{cases}$

Задание 5.35. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 8. \end{cases}$

Задание 5.36. $W = x_1 + 3x_2 \to \min; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5. \end{cases}$

Задание 5.37. $W = x_1 - 3x_2 \to \min; \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5. \end{cases}$

Задание 5.38. $W = 2x_1 + 5x_2 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 300. \end{cases}$

Задание 5.39. $W = x_1 + 4x_2 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$

Задание 5.40. $W = 2x_1 + x_2 \to \max; \quad \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 11. \end{cases}$

Задание 5.41. $W = 2x_1 + 2x_2 \to \min;\ \begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8. \end{cases}$

Задание 5.42. $W = 3x_1 + 2x_2 \to \max;\ \begin{cases} x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 6 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}4x_2 \le 2. \end{cases}$

Задание 5.43. $W = x_1 + x_2 \to \max;\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30. \end{cases}$

Задание 5.44. $W = 5x_1 + x_2 \to \max;\ \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \ge 11 \\ x_1 \le 2{,}75 \\ 3x_2 \le 1{,}1. \end{cases}$

Задание 5.45. $W = 2x_1 + 7x_2 \to \max;\ \begin{cases} x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 9. \end{cases}$

Задание 5.46. $W = x_1 - 2x_2 \to \min;\ \begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 1 \\ -2x_1 + 24x_2 \le 1. \end{cases}$

Задание 5.47. $W = x_1 + 3x_2 \to \max;\ \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 17 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

Задание 5.48. $W = 2x_1 + 4x_2 \to \max;\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + 6x_2 \le 7. \end{cases}$

Задание 5.49. $W = 2x_1 + 3x_2 \to \min;\ \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ -4x_1 + 6x_2 \le 9. \end{cases}$

Задание 5.50. $W = 4x_1 + 6x_2 \to \max;\ \begin{cases} x_1 + 15x_2 \le 32 \\ x_1 \le 31 \\ x_2 \le 2. \end{cases}$

Задание 5.51. $W = 4x_1 + x_2 \to \min;\ \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 9 \\ -5x_1 + 8x_2 \le 4. \end{cases}$

Задание 5.52. $W = 2x_1 + x_2 \to \min;\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ -2x_1 + 9x_2 \le 21. \end{cases}$

Задание 5.53. $W = x_1 + 5x_2 \to \max;\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 7. \end{cases}$

5.7. Задания для самостоятельной работы по решению задач линейного программирования симплекс-методом [4]

Решение всех заданий осуществить с использованием встроенной графики Word.

Задание 5.54. $\max L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4;$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8;$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10;$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.55. $\max L = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16;$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 14;$$
$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.56. $\max L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 9;$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 4;$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.57. $\max L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 10;$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 4;$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.58. $\max L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 12;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8;$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 15;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.59. $\max L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4;$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3;$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4;$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.60. $\max L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4;$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8;$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 10;$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.61. $\max L = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4;$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4;$

$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.62. $\max L = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4;$

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8;$

$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10;$

$x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.63. $\max L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4;$

$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2;$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4;$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.64. $\max L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4;$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4;$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6;$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.65. $\max L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7;$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1;$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.66. $\max L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4;$

$x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 6;$

$2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7;$

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7;$

$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}.$

Задание 5.67. $\max L = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4;$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8;$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9;$$
$$2x_1 + 2x_3 + x_4 = 8;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.68. $\max L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4;$

$$x_1 + 2x_2 = 6;$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 6;$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задание 5.69. $\max L = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4;$

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5;$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 4;$$
$$2x_2 + x_3 = 4;$$
$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}.$$

5.8. Примеры решения задач линейного программирования на базе Excel

Электронные таблицы, или, как их еще называют, табличные процессоры – это удобное средство проведения расчетов и анализа результатов. Они предназначены для работы с большими таблицами чисел, в основном, для организации относительно несложных расчетов с большим количеством идентичных данных, например, бухгалтерского учета. Значительное число задач в экономике составляют задачи распределения ресурсов и так называемые транспортные задачи. Наиболее часто математической моделью таких задач является задача линейного программирования. Ниже приводятся примеры решения таких задач с использованием среды MS Excel. Освоение основных приемов использования стандартных механизмов Excel при решения указанных задач, заключенного в надстройке "Поиск решения", позволит успешно решать большинство приведенных выше заданий с использованием этих технологий.

5.8.1. Решение задачи распределения ресурсов

Значительное число задач в экономике составляют задачи распределения ресурсов. Наиболее часто математической моделью таких задач является задача линейного программирования.

Суть задачи о распределении ресурсов

Предположим, имеются какие-либо ресурсы (сырье, рабочая, сила, оборудование):

$$R_1, R_2, \ \dots, R_m \tag{5.42}$$

в количествах, соответственно:

$$b_1, b_2, \dots, b_m \tag{5.43}$$

единиц ресурсов.

С помощью ресурсов $R_1, R_2, \ \dots, R_m$ могут производиться различные товары

$$T_1, T_2, \ \dots, T_m. \tag{5.44}$$

Для производства одной единицы товара T_j необходимо a_{ij} единиц ресурса R_i ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$), где m – количество ресурсов, n – количество видов продукции.

Каждая единица ресурса R_i стоит d_i рублей ($i = 1, 2, \dots, m$). Каждая единица товара может быть реализована по цене c_j ($j = 1, 2, \dots, n$).

Количество произведенных единиц должно быть ограничено спросом, т.к. рынок не может поглотить больше, чем k_j единиц товара T (j = 1, 2, …, n).

Задача об оптимальном распределении ресурсов состоит в том, чтобы определить, какое количество товара необходимо произвести для того, чтобы получить максимальную прибыль.

Введем некоторые обозначения:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – количества товаров $T_1, T_2, \ \dots, T_n$, запланированных к производству.

Условия спроса налагают на эти величины следующие ограничения:

$$x_1 \le k_1; \ x_2 \le k_2; \ \dots; x_n \le k_{2n}. \tag{5.45}$$

Нельзя израсходовать ресурсов больше, чем имеется в наличии. Следовательно, получаем ограничения по использованию ресурсов:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m; \end{array}\right\}, \tag{5.46}$$

т.е. сумма произведений, необходимых для производства количеств ресурсов на объем производства по каждому виду продукции, не должна превышать имеющееся количество данного ресурса.

Теперь необходимо выразить прибыль L в зависимости от элементов решения $x_1, x_2, \dots, x_n$, т.е. планируемых объемов производства продукции. Для этого сначала необходимо определить себестоимость товара.

Себестоимость s_j единицы товара T_j будет равна:

$$s_j = a_{1j}d_1 + a_{2j}d_2 + \dots + a_{mj}d_m, \tag{5.47}$$

т.е. сумме произведений количеств требуемых ресурсов на их цены.

Вычислив себестоимость каждого вида продукции, получим ряд значений:

$$s_1, s_2, \ldots, s_n. \quad (5.48)$$

Прибыль от реализации одного какого-либо вида продукции q_i будет рассчитываться по формуле:

$$q_i = c_i - s_i, \quad (5.49)$$

где c_i – продажная (отпускная) цена какого-либо вида продукции, s_i – себестоимость вида продукции; $i = 1, 2, \ldots, n$; n – кол-во видов продукции.

В результате вычисления прибыли от реализации по каждому виду продукции получим набор значений:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n. \quad (5.50)$$

Общая прибыль от реализации всех видов продукции составит:

$$L = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n, \quad (5.51)$$

где q_i – прибыль от реализации единицы продукции; x_i – объем производства данного вида продукции.

Задача сводится к тому, чтобы выбрать такие неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (объемы производства продукции по каждому виду), чтобы удовлетворялись наложенные ограничения по ресурсам и соблюдались условия спроса на производимую продукцию, и при этом была бы получена максимальная прибыль, т.е. целевая функция принимала бы максимально возможное значение.

Для решения задачи распределения ресурсов используют симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Пример решения

В Excel имеется стандартный механизм разрешения подобных задач, заключенный в надстройке "**Поиск решения**". Для его использования необходимо активировать данную надстройку: ***Сервис → Надстройки*** …

Далее активировать элемент списка **Поиск решения**, как это показано на рис. 5.7, и нажать **OK**. После этого опция ***Поиск решения*** станет доступна в меню ***Сервис***.

Теперь необходимо создать форму для решения задачи. Форма должна выглядеть, как показано на рис. 5.8. Серым цветом фона на рисунке отмечены ячейки, в которые пользователь должен ввести исходные данные. Черный цвет фона означает, что в данные ячейки должны быть введены формулы.

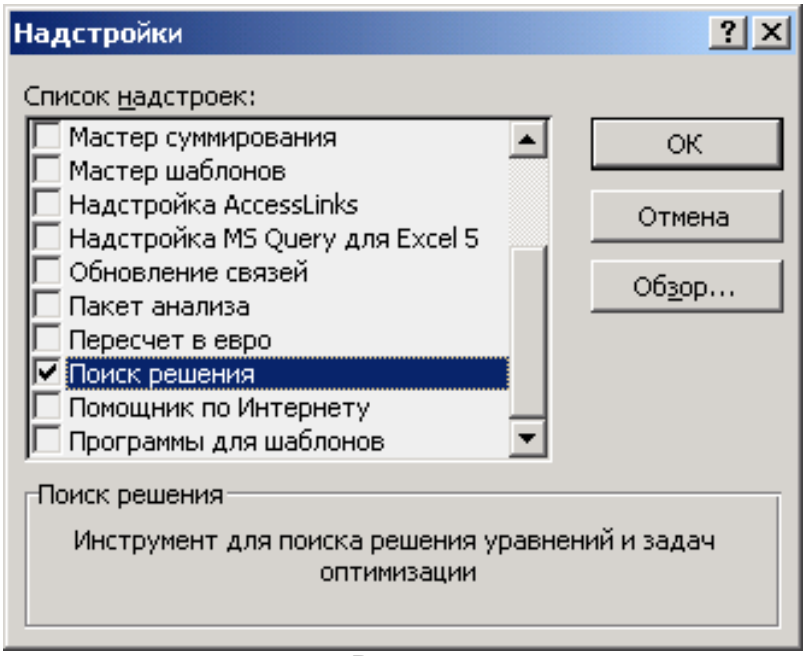


Рис. 5.7

Какие же формулы должны быть введены в ячейки, отмеченные черным цветом? Это формулы, рассчитывающие соответствующие значения математических выражений, рассмотренных выше:

1. В ячейку ***E8*** должна быть введена формула, рассчитывающая целевую функцию (***ЦФ***). Целевая функция, как было рассмотрено выше, для задачи распределения ресурсов представляет собой сумму произведений переменных "*прибыль от реализации единицы продукции*" (q_i) на объем производства данной продукции (x_i), т.е. $L = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$.

Так как q_i - коэффициенты целевой функции, представленные в ячейках диапазона ***B8:D8***, а x_i – объемы производства, которые будут после решения задачи представлены в ячейках ***B5:D5***, то формула расчета целевой функции должна рассчитывать сумму произведений ячеек ***B5:D5*** на ***B8:D8***.

Для расчета суммы произведений диапазонов ячеек предусмотрена математическая функция Excel "***СУММПРОИЗВ***".

= СУММПРОИЗВ(Список перемножаемых диапазонов)

Для расчета целевой функции необходимо в ячейку ***E8*** ввести формулу

=СУММПРОИЗВ(B$5:D$5;B8:D8).

Теперь необходимо ввести ограничения использования ресурсов – систему неравенств-ограничений, исходные данные которой должны быть представлены в секции "**Ограничения**".

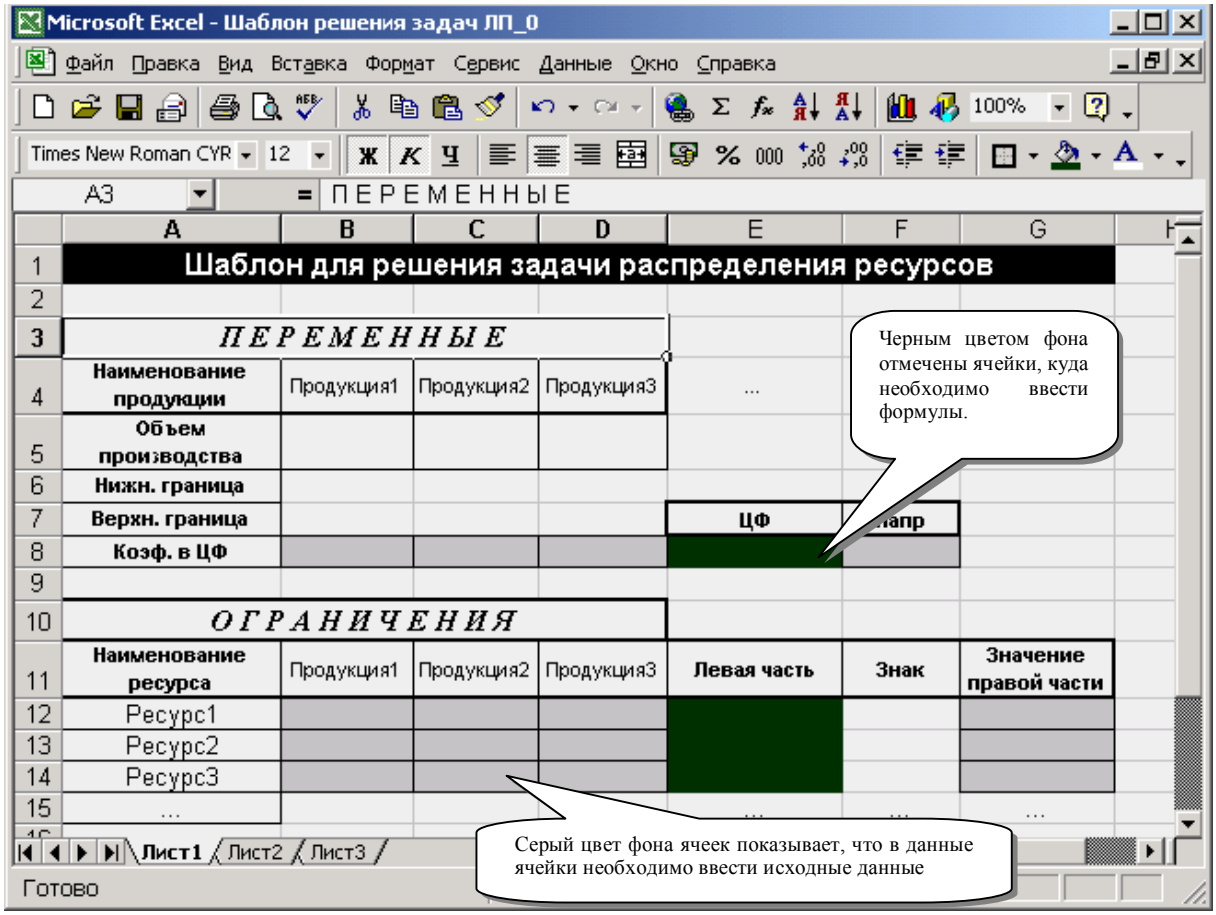


Рис. 5.8

Каждое неравенство выражает ограничение объемов производства различных видов продукции имеющимся количеством данного ресурса и имеет левую и правую части. Левая часть неравенства, как уже было рассмотрено, представляет собой сумму произведений количества ресурса, требуемого на производство единицы продукции (a_{ij}), на объем производства данного вида продукции (x_i). Правая часть неравенства отражает количество ресурса, которое имеется в распоряжении.

Так как объемы производства представлены в диапазоне ячеек ***B5:D5***, а количество ресурса, необходимое для производства единицы продукции, представлено в диапазонах ***B12:D12*** (для ресурса "***Ресурс1***"), ***B13:D13*** (для ресурса "***Ресурс2***"), ***B14:D14*** (для ресурса "***Ресурс3***"), то в ячейках ***E12:E14*** соответственно должны быть формулы:

E12 = СУММПРОИЗВ(B$5:D$5; B12:D12)
E13 = СУММПРОИЗВ(B$5:D$5; B13:D13)
E14 = СУММПРОИЗВ(B$5:D$5; B14:D14),

т.е. суммы произведений соответствующих ячеек.

После ввода формул в ячейки форма примет следующий вид (рис. 5.9):

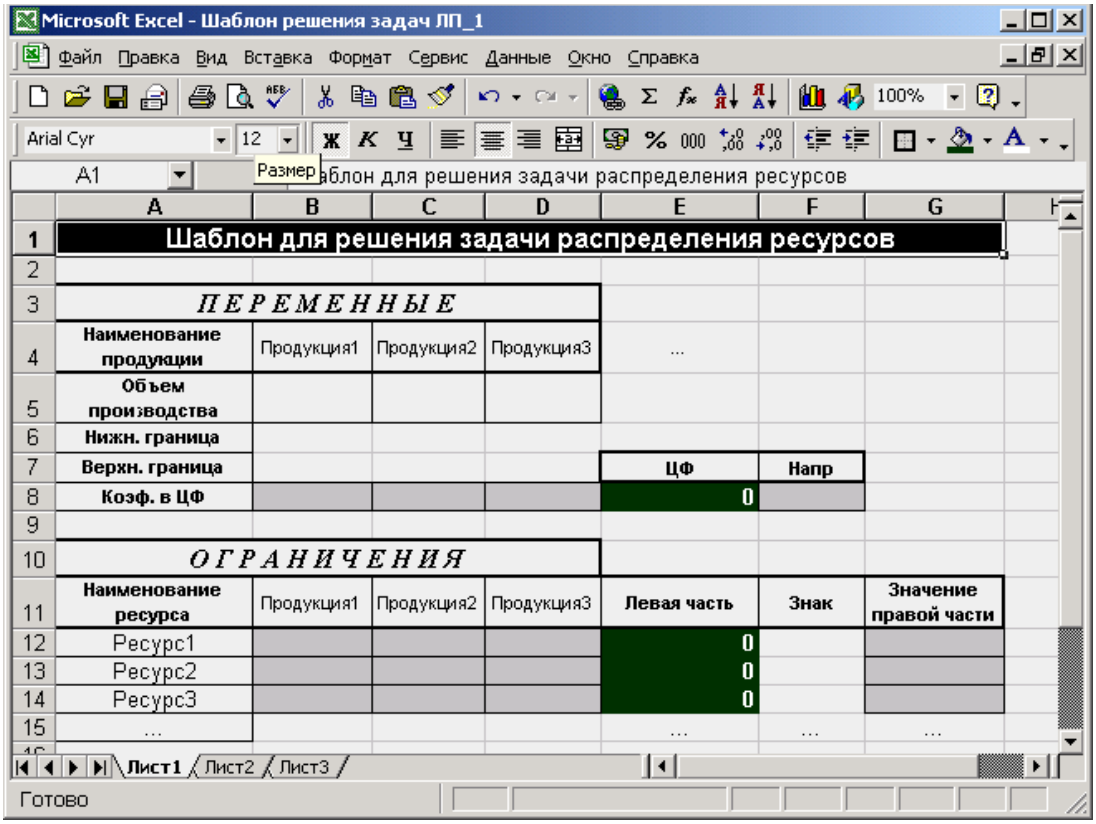


Рис. 5.9

Если включить режим отображения формул (***Сервис*** → ***Параметры*** **…** → ***Вид*** → ***Параметры окна*** → ***Формулы*** → **Ok**), то форма примет следующий вид (рис. 5.10):

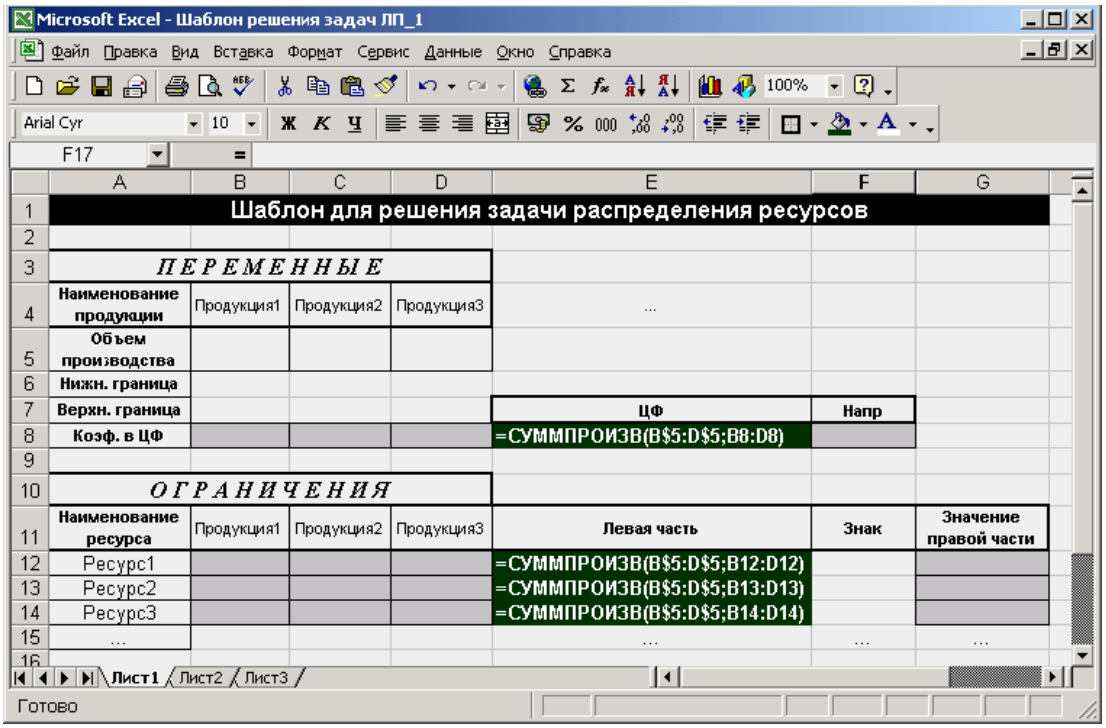


Рис. 5.10

Отключить режим отображения формул можно аналогичным способом.

После ввода формул необходимо ввести исходные данные задачи.

Исходные данные

Имеются три вида продукции, объемы производства обозначены соответственно x_1, x_2, x_3. Для производства требуются три ресурса (например, труд, сырье, финансы). Использование каждого ресурса для единицы каждого вида продукции выражается коэффициентами при переменных x_1, x_2, x_3 в следующей системе неравенств:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \le 20 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 \le 200 \end{aligned}\right\},$$

где первое неравенство – ограничение по ***ресурсу1***, второе – по ***ресурсу2***, третье – по ***ресурсу3***. Правая часть неравенств отражает ограничение по использованию данного ресурса для производства.

Целевая функция выглядит следующим образом:

$$L = 80x_1 + 100x_2 + 50x_3.$$

Из условия задачи видно, что значения коэффициентов при переменных первого уравнения необходимо ввести в ячейки ***B12, C12, D12*** соответственно. Значения коэффициентов второго уравнения необходимо ввести в ячейки ***B13, C13, D13*** формы, коэффициенты третьего уравнения – в ячейки ***B14, C14, D14***.

Правую часть неравенств уравнений необходимо ввести соответственно для первого уравнения – в ячейку ***G12***, для второго – в ячейку ***G13***, третьего – ***G14***.

В ячейки ***F12:F14*** введем знаки неравенств **<=** (меньше или равно). Следует отметить, что введенные знаки никак не влияют на процесс расчета, однако они необходимы для понимания представленных в форме данных.

Введем коэффициенты при целевой функции в ячейки ***B8:D8***. В ячейку ***F8*** введем направление поиска оптимального значения целевой функции: *минимум* или *максимум* (значение данной ячейки также необходимо только для понимания представленных данных и не влияет на ход расчета).

В результате ввода данных форма примет следующий вид (рис. 5.11):

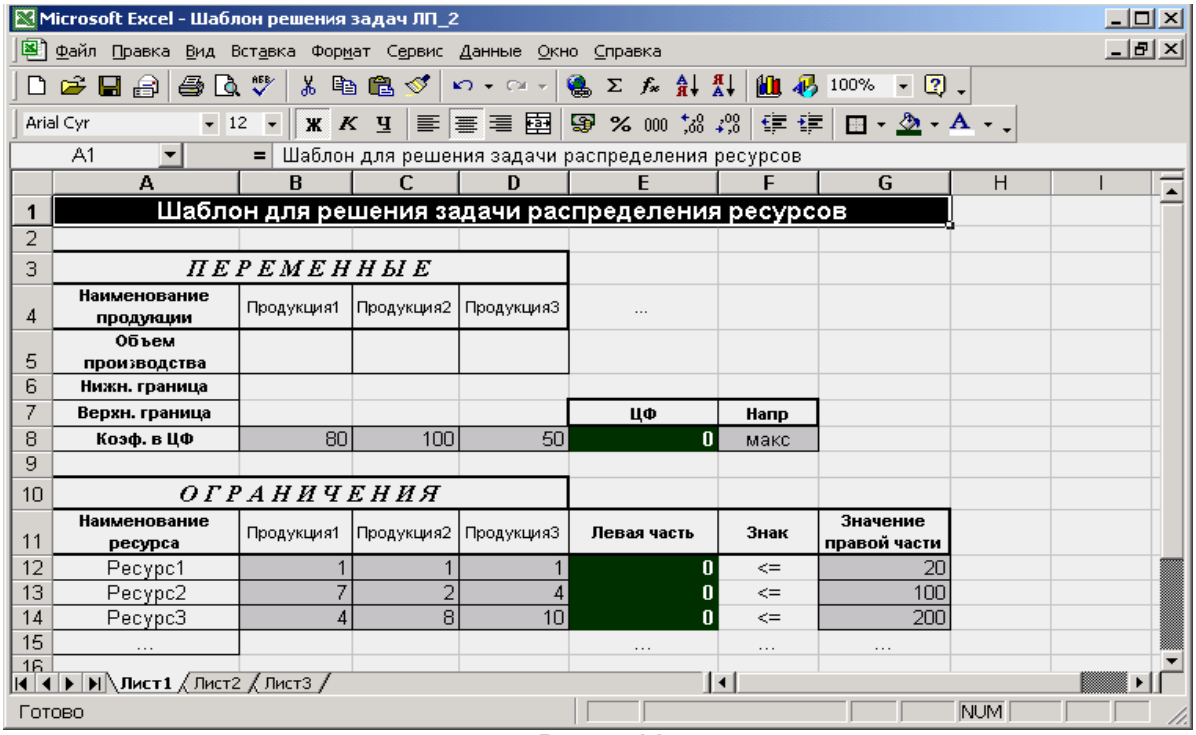


Рис. 5.11

Теперь необходимо задействовать механизм поиска оптимального решения (значений x_1, x_2, x_3 для получения максимального значения целевой функции L): ***Сервис → Поиск решения…***

Появившийся в результате диалог "***Поиск решения***" (рис. 5.12) необходим для определения параметров расчета и его настроек:

1. В поле "***Установить целевую ячейку***" необходимо указать ***$E$8***.

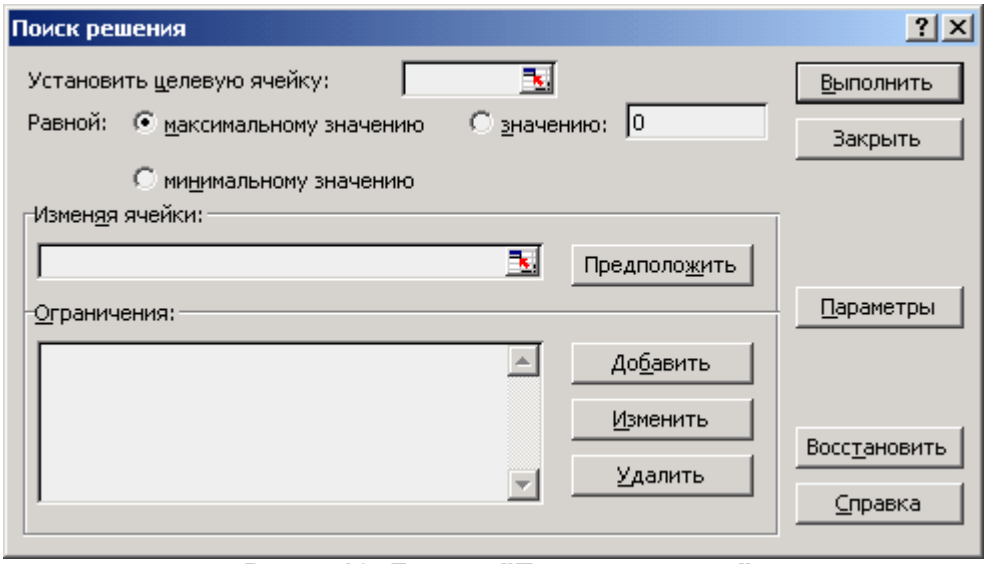


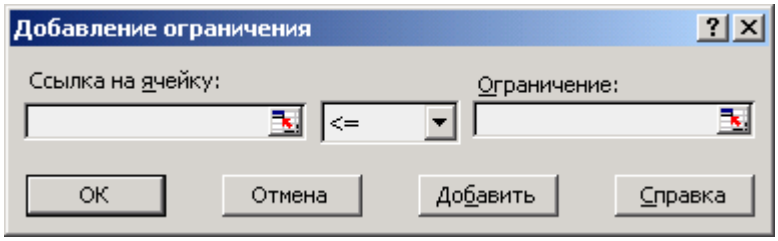
Рис. 5.12. Диалог "Поиск решения"

2. Активировать переключатель "***максимальному значению***", что означает, что будет производиться максимизация значения целевой функции.

3. В поле "***Изменяя ячейки***" указать диапазон ячеек, в которые необходимо будет поместить значения объемов производства для каждого вида продукции, т.е. необходимо указать диапазон ***B5:D5***.

4. В секции "***Ограничения***:" необходимо добавить настройки ограничений расчета, для чего следует:

а) Нажать кнопку "**Добавить**"



и в появившемся диалоге заполнить параметры ограничения для каждого неравенства:

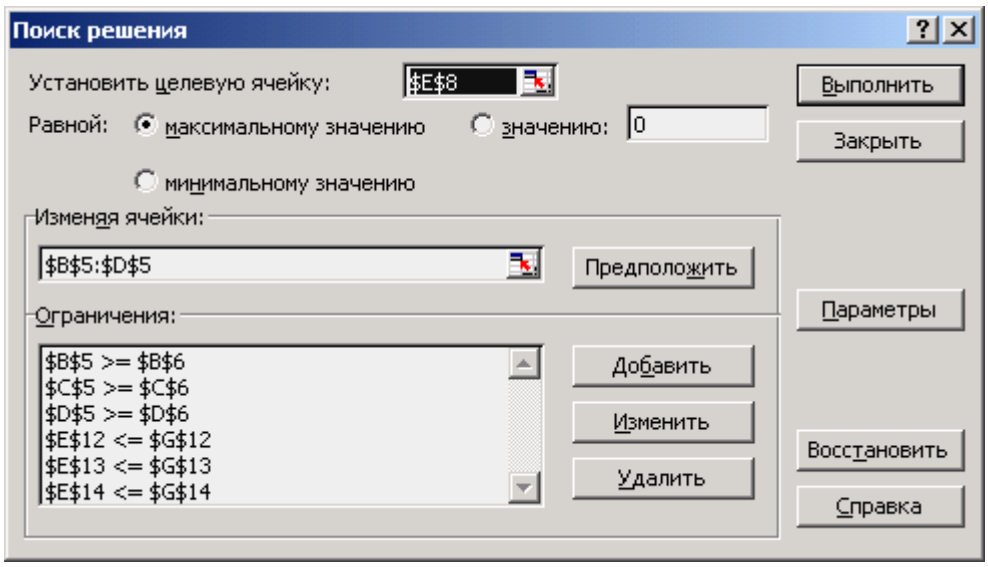
- в поле "***Ссылка на ячейку***" выбрать ячейку, содержащую формулу левой части соответствующего неравенства, т.е. для первого неравенства выбрать ячейку ***E12***;

- далее знак ограничения оставить без изменений;

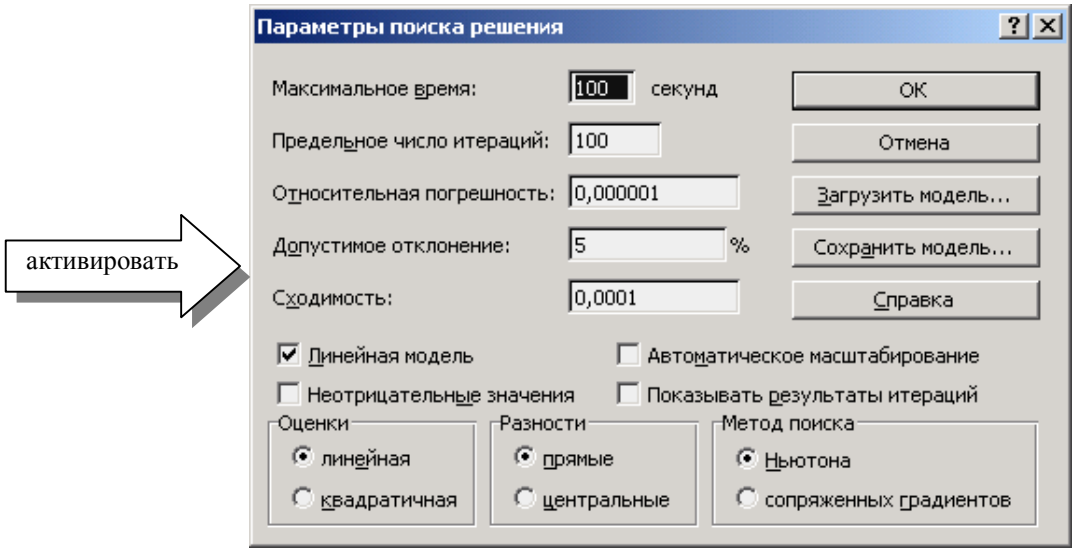
б) В поле "***Ограничение***" необходимо ввести имя ячейки, содержащей значение правой части неравенства (для первого неравенства это ***G12***).

в) Рассмотренную в п. а) процедуру повторить для каждого выбираемого неравенства.

Таким образом, после ввода параметров диалог "**Поиск решения**" примет следующий вид:

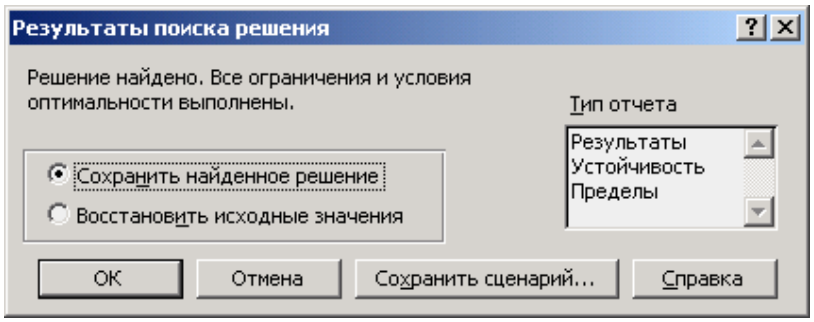


5. Нажать кнопку "**Параметры**" диалога "**Поиск решения**", что приведет к активации диалога "**Параметры поиска решения**".



В появившемся диалога необходимо все оставить без изменения, за исключением переключателя "***Линейная модель***" → Нажать **Ok**.

6. В диалоге "**Поиск решения**" нажать кнопку "**Выполнить**". Если оптимальное решение существует, на экран будет выведен следующий диалог.



Диалог свидетельствует об успешном поиске оптимального решения.

Предложенное "***Сохранить найденное значение***" означает, что найденные значения объемов производства **x1, x2, x3**, максимизирующие целевую функцию прибыли, будут помещены в соответствующие ячейки.

"***Восстановить исходные значения***" – означает отмену проведенного расчета.

Если решение найти не удалось, то пользователю будет выведен диалог о неуспешной попытке поиска оптимального решения.

Результат расчета представлен на рис. 5.13.

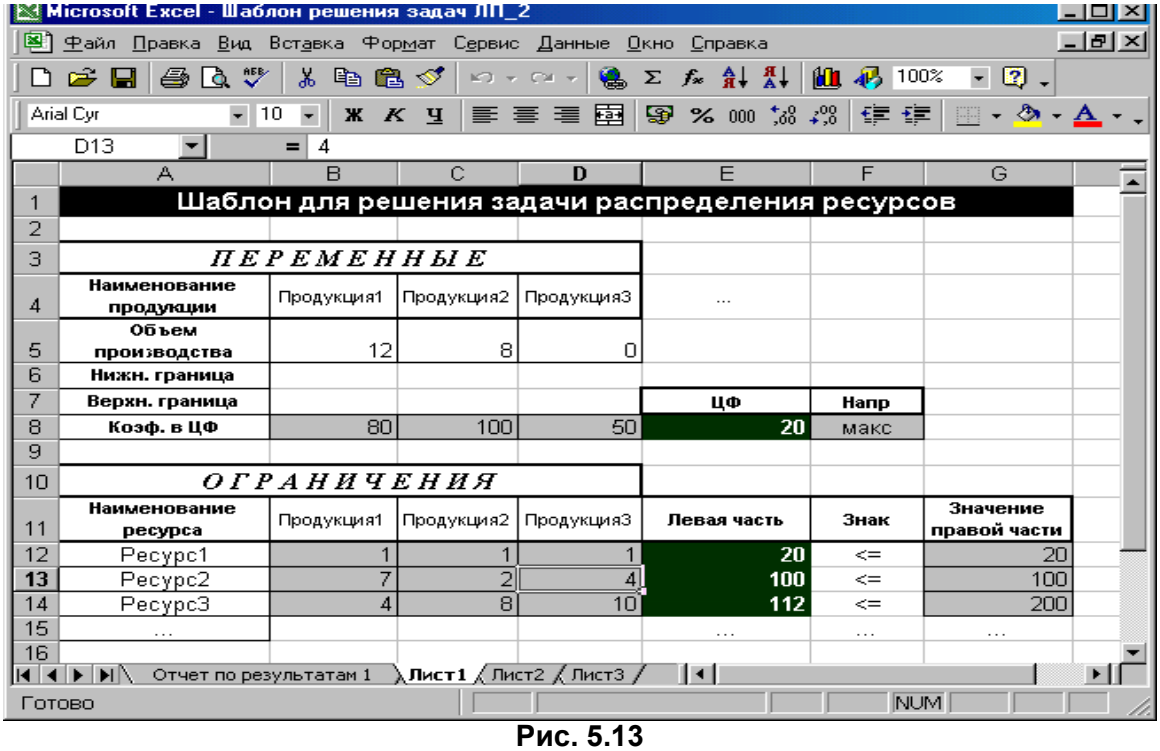


Рис. 5.13

Из рисунка видно, что максимальная прибыль составит **20** денежных единиц, при этом необходимо запланировать выпуск продукции **Продукция1** в объеме **12** единиц, продукции **Продукция2** – в объеме **8** единиц, а продукцию **Продукция3** не производить вовсе в условиях установленных ограничений на использование ресурсов.

Варианты заданий для самостоятельного решения

Вариант 1

Для изготовления четырех видов продукции (**П1, П2, П3, П4**) используются три вида ресурсов (**Р1, Р2, Р3**). Другие условия представлены в следующей таблице:

Ресурсы	Запас ресурсов, ед.	Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.			
		П1	П2	П3	П4
Р1	3500	2	1	1	4
Р2	1300	1	5	3	0
Р3	3200	3	0	6	2
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		9	4	6	15

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Вариант 2

Для изготовления четырех видов продукции (**П1, П2, П3, П4, П5, П6, П7**) используются пять видов ресурсов (**Р1, Р2, Р3, Р4, Р5**). Другие условия представлены в следующей таблице:

Ресурсы	**Запас ресурсов, ед.**	**Нормы расхода сырья на единицу продукции, ед.**						
		П1	**П2**	**П3**	**П4**	**П5**	**П6**	**П7**
Р1	3500	2	1	1	4	4	4	4
Р2	1300	1	5	3	0	0	0	0
Р3	3200	5	5	1	2	4	2	0
Р4	1000	3	0	6	0	2	2	2
Р5	500	1	5	6	2	7	10	2
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		20	10	2	4	15	23	1

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

5.8.2. Решение транспортной задачи

Транспортная задача – это задача о минимизации расходов на перевозку грузов. Классическая транспортная задача формулируется следующим образом.

Имеется некоторое количество (m) пунктов отправления:

$$A_1, A_2, \ldots, A_m \tag{5.52}$$

в которых сосредоточены запасы какого-либо однородного товара в количествах

$$a_1, a_2, \ldots, a_m. \tag{5.53}$$

Имеется также n пунктов назначения:

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \tag{5.54}$$

подавших заявки на определенное количество товара соответственно:

$$b_1, b_2, \ldots, b_n. \tag{5.55}$$

Предполагается, что сумма всех заявок равна сумме всех запасов

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.56}$$

Стоимость перевозки товара из пункта отправления i в пункт назначения j известна для всех вариантов перевозок и равна c_{ij}. Таким образом, имеется матрица стоимостей перевозок:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{5.57}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором все заявки были бы выполнены, и при этом общая стоимость перевозок была бы минимальной.

Так как показателем эффективности является стоимость перевозок, то данную задачу можно назвать транспортной задачей по критерию стоимости.

Рассмотрим математическую формулировку задачи.

Введем некоторые обозначения:

x_{ij} – количество груза, отправляемого из i-го пункта отправления A_i в j-й пункт назначения B_j (i = 1, …, n; j = 1, …, m). Переменные x_{11}, x_{12}, …, x_{mn} должны быть неотрицательными и удовлетворять следующим условиям:

1. Общее количество груза, направляемое из каждого пункта отправления во все пункты назначения, должно быть равно запасу груза в данном пункте.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m \end{array}\right\} \qquad (5.58)$$

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый пункт назначения изо всех пунктов отправления, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом.

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n \end{array}\right\} \qquad (5.59)$$

3. Стоимость всех перевозок должна быть минимальной.

$$L=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+\ldots+c_{21}x_{11}+c_{22}x_{22}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}\,.$$

Методы решения транспортной задачи не требуют манипуляций с симплекс-таблицами, а сводятся к более простым операциям непосредственно с таблицей, где в определенном порядке записаны все условия транспортной задачи.

В транспортной таблице записываются:

- пункты отправления (*заголовки строк*) и назначения (*заголовки столбцов*);
- запасы, имеющиеся в пунктах отправления (*последний столбец таблицы*);
- заявки, поданные пунктами назначения (*последняя строка таблицы*);
- стоимости перевозок из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения (*табличная часть*).

		Пункты назначения				
		B_1	B_2	…..	B_n	**Запасы** $\mathbf{a_i}$
Пункты отправления	A_1	C_{11}	C_{12}	…..	C_{1n}	$\mathbf{a_1}$
	A_2	C_{21}	C_{22}	…..	C_{2n}	$\mathbf{a_2}$
	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	**. . .**
	A_n	C_{m1}	C_{m2}	. . .	C_{mn}	$\mathbf{a_m}$
	Заявки $\mathbf{b_i}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	**. . .**	$\mathbf{b_n}$	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Для решения транспортной задачи используется надстройка "**Поиск решения**" (***Сервис*** → ***Надстройки*** → ***Поиск решения***). Перед использованием механизма поиска решения необходимо ввести исходные данные и расположить их на листе соответствующим образом. Рассмотрим процесс решения транспортной задачи на примере.

Пример решения

Предположим, необходимо организовать поставки товаров в какой-то город *N*. В городе *N* существует спрос на следующие товары:

Наименование товара	Спрос, ед.
Товар1	500
Товар2	600
Товар3	500
Товар4	5 000
Товар5	10 000

Товары находятся в разных городах на разных оптовых базах. Запасы товаров на складах в различных городах представлены ниже в таблице.

Запасы товаров на складах, ед.

Наименование товара	Ростов	Москва	Ставрополь	Краснодар
Товар1	500	200	400	200
Товар2	600	2 500	2 000	2 300
Товар3	1 000	6 000	200	2 000
Товар4	2 000	2 500	200	2 356
Товар5	3 600	25 000	2 355	222

Известна также стоимость доставки единицы товара в денежных единицах из других городов в город *N*.

Стоимость доставки товаров в город *N* из других городов, ден. ед.

Наименование товара	Ростов	Москва	Ставрополь	Краснодар
Товар1	2	4	2	2
Товар2	20	50	30	23
Товар3	40	80	60	30
Товар4	1	4	2	1
Товар5	225	500	150	600

Требуется составить такой план закупки продукции, чтобы суммарная стоимость доставки товаров была бы минимальной, при условии полного удовлетворения спроса на товары в городе *N*.

Таким образом, требуется вычислить, "***какой товар, где и в каком количестве необходимо приобрести***", чтобы суммарные транспортные расходы были минимальными.

Задача решается в следующей последовательности:

1. Создается книга Excel и на чистом листе создается рабочая форма (рис. 5.14).

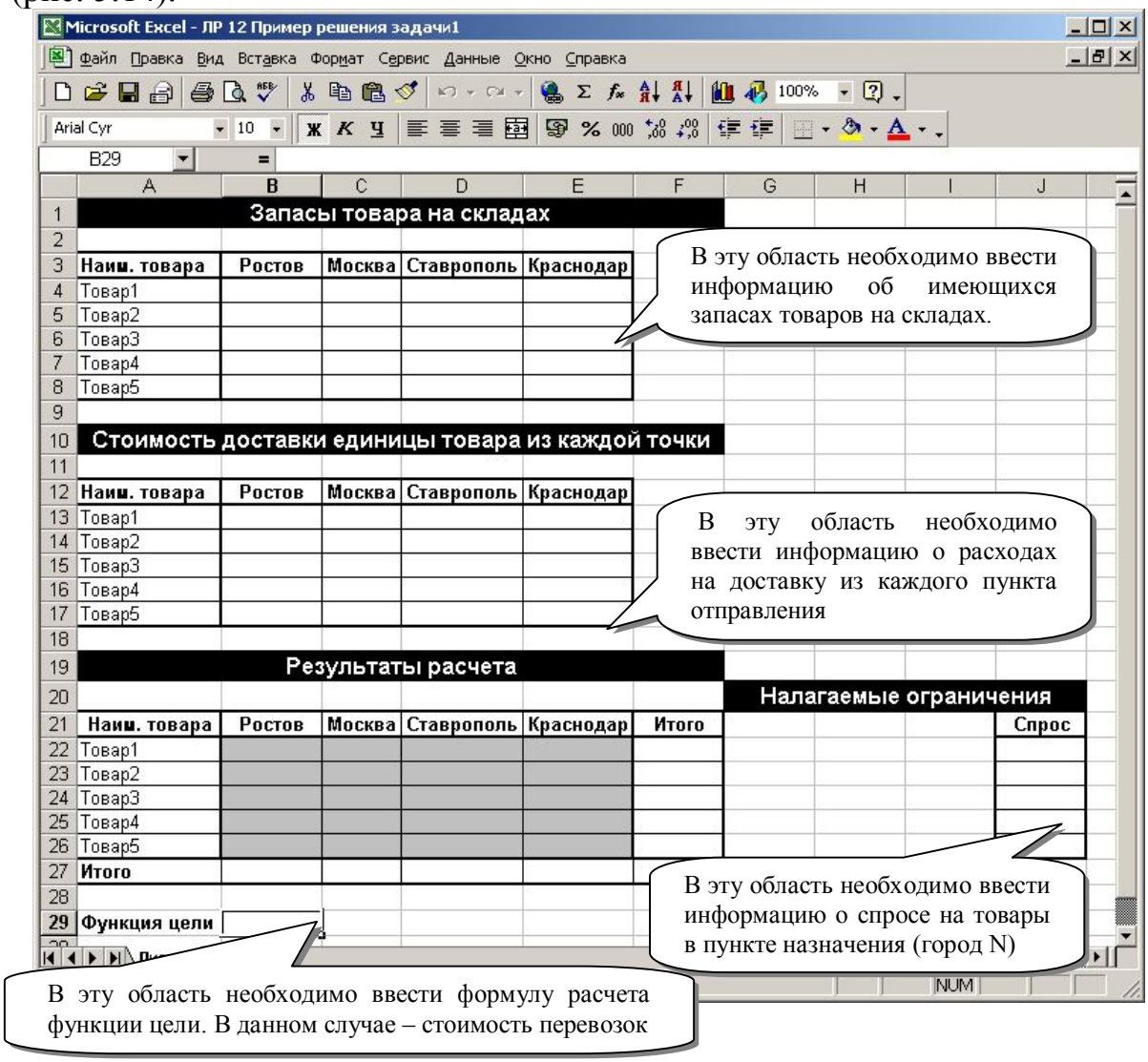


Рис. 5.14. Создание рабочей формы

Область ячеек, отмеченная на рисунке серым цветом, предназначена для размещения результатов расчета – найденных значений объемов перевозок из каждого пункта отправления.

2. Введите формулы в соответствующие ячейки.

Ячейки с ***F22*** по ***F26*** должны содержать суммарный объем перевозок по каждому товару, т.е.:

F22 = СУММ(B22:E22)
F23 = СУММ(B23:E23)
F24 = СУММ(B24:E24)
F25 = СУММ(B25:E25)
F26 = СУММ(B26:E26).

Ячейки с ***B27*** по ***E27*** должны содержать суммарный объем перевозок из каждого пункта отправления (т.е. из каждого города), следовательно, должны содержать формулы

B27 = СУММ(B22:B26)
C27 = СУММ(C22:C26)
D27 = СУММ(D22:D26)
E27 = СУММ(E22:E26).

Так как в рассчитываемом плане перевозок объем перевозок по каждому товару не может превышать суммарного имеющегося на складах количества, то необходимо рассчитать предельные величины объемов перевозок по каждому товару. Для того, чтобы определить предельный объем перевозок по товару "**Товар1**", просуммируем значения ячеек ***B4:E4***:

H22 = СУММ(B4:E4).

Соответственно для других товаров:

H23 = СУММ(B5:E5)
H24 = СУММ(B6:E6)
H25 = СУММ(B7:E7)
H26 = СУММ(B8:E8).

Для обеспечения читаемости формы и ее результатов введем текст "<=" в каждую ячейку диапазона ***G23:G26***:

G23 <=
G24 <=
G25 <=
G26 <=

Так как необходимо спланировать такой объем перевозок, чтобы спрос на рынке был удовлетворен, заполним другое ограничение на поиск решения – *ограничение по спросу на товары в пункте назначения*. Для обеспечения читаемости формы введем "=" в каждую ячейку диапазона ***I22:I26***.

Определим формулу для функции цели. Функцией цели в данном случае является суммарная стоимость перевозок. Стоимость перевозки

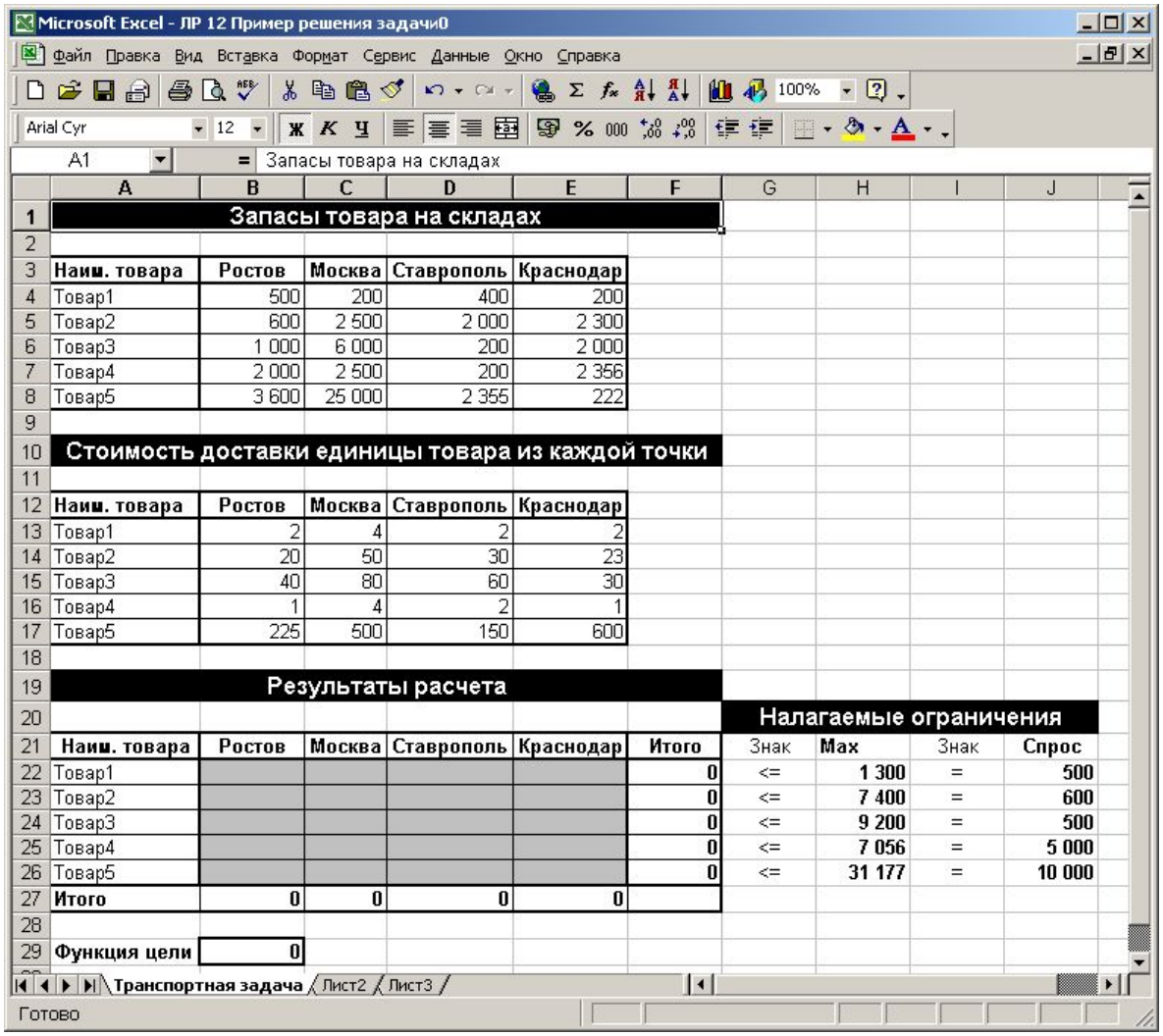
товара из пункта отправления в пункт назначения равна произведению стоимости перевозки единицы груза по данному маршруту на объем перевозки.

Таким образом, необходимо вычислить сумму произведений ячеек диапазона ***B13:E17*** (стоимости перевозок) на соответствующие ячейки диапазона ***B22:E26*** (объемы производства).

Следовательно, в ячейке ***B29*** (*целевая функция*) необходимо ввести формулу для расчета целевой функции:

B29 = СУММПРОИЗВ(B13:E17;B22:E26)

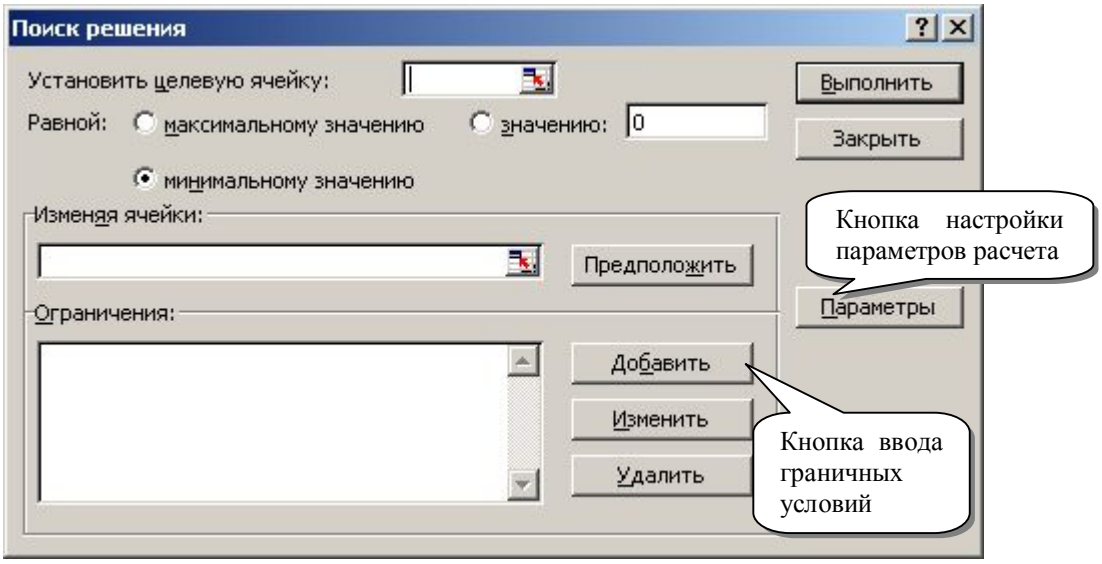
Теперь необходимо ввести исходные данные в соответствующие области формы. После ввода данных получим форму, готовую для поиска решения транспортной задачи.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Запасы товара на складах									
2										
3	Наим. товара	Ростов	Москва	Ставрополь	Краснодар					
4	Товар1	500	200	400	200					
5	Товар2	600	2 500	2 000	2 300					
6	Товар3	1 000	6 000	200	2 000					
7	Товар4	2 000	2 500	200	2 356					
8	Товар5	3 600	25 000	2 355	222					
9										
10	Стоимость доставки единицы товара из каждой точки									
11										
12	Наим. товара	Ростов	Москва	Ставрополь	Краснодар					
13	Товар1	2	4	2	2					
14	Товар2	20	50	30	23					
15	Товар3	40	80	60	30					
16	Товар4	1	4	2	1					
17	Товар5	225	500	150	600					
18										
19	Результаты расчета									
20							Налагаемые ограничения			
21	Наим. товара	Ростов	Москва	Ставрополь	Краснодар	Итого	Знак	Max	Знак	Спрос
22	Товар1					0	<=	1 300	=	500
23	Товар2					0	<=	7 400	=	600
24	Товар3					0	<=	9 200	=	500
25	Товар4					0	<=	7 056	=	5 000
26	Товар5					0	<=	31 177	=	10 000
27	Итого	0	0	0	0					
28										
29	Функция цели	0								

Рис. 5.15. Форма, заполненная для решения транспортной задачи

3. **Поиск решения**. Запускается процесс поиска решения (***Сервис → Поиск решения…***)



Более подробно диалог **"Поиск решения"** рассмотрен при решении предыдущей задачи (5.8.1).

В диалоге, показанном на рисунке, необходимо:

- в поле **"Установить целевую ячейку"** указать абсолютную ссылку или имя ячейки, содержащей целевую функцию (в данном примере - ***$B$29***);

- установить переключатель "**Равной**"***: минимальному значению*** для минимизации целевой функции;

- в поле **"Изменяя ячейки"** установить ссылку на диапазон ячеек, значения которых будут изменяться при оптимизации целевой функции (в данном примере - ***$B$22:$E$26***);

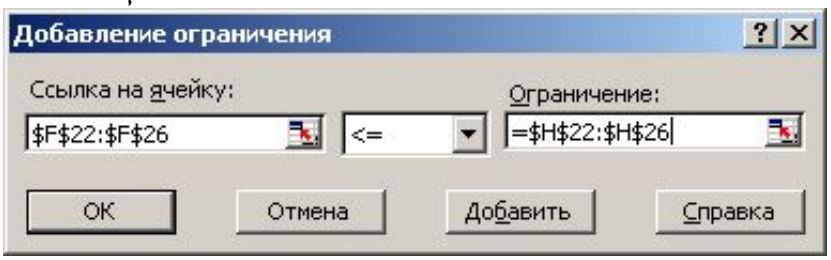
- определить граничные условия в секции **"Ограничения"**.

Для проведения расчета следует задать необходимые ограничения.

Первое ограничение:

Объем перевозок товара не может быть больше имеющегося в данный момент на складах количества данного товара. Следовательно, значения ячеек диапазона ***F22:F26*** должны быть меньше или равны значениям соответствующих ячеек диапазона ***H22:H26***.

Для определения граничных условий, как это уже было рассмотрено в предыдущей задаче (5.8.1), необходимо воспользоваться кнопкой "**Добавить**" диалога **"Поиск решения".** Введем необходимое ограничение: ***объем перевозок по каждому товару не должен превышать имеющегося на складах количества данного товара***.

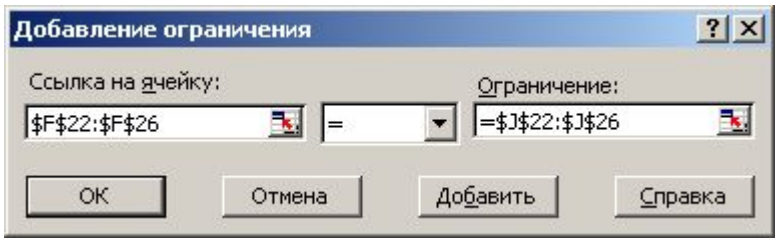


После ввода ограничения на поиск решения нажмите "**Добавить**".

Второе ограничение

Объем перевозок товара должен полностью удовлетворить спрос на товар в пункте назначения, т.е. ***объем перевозок должен быть равен спросу на данный товар***, чтобы полностью удовлетворить потребность в данном товаре. Таким образом, значения ячеек диапазона ***F22:F26*** должны быть равны соответствующим ячейкам диапазона ***J22:J26***.

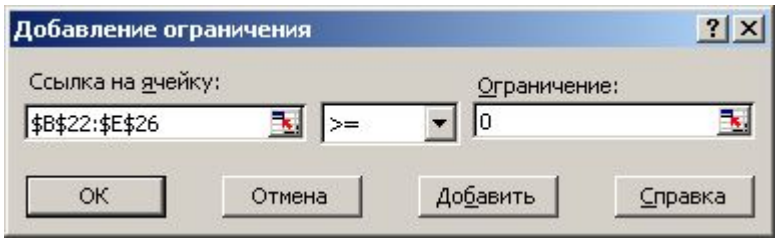
Следовательно, второе ограничение будет выглядеть следующим образом:



Нажмите "**Добавить**".

Третье ограничение

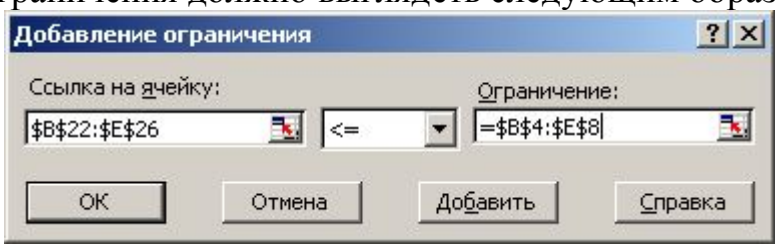
Объем перевозок по каждому товару должен быть больше или равен нулю:



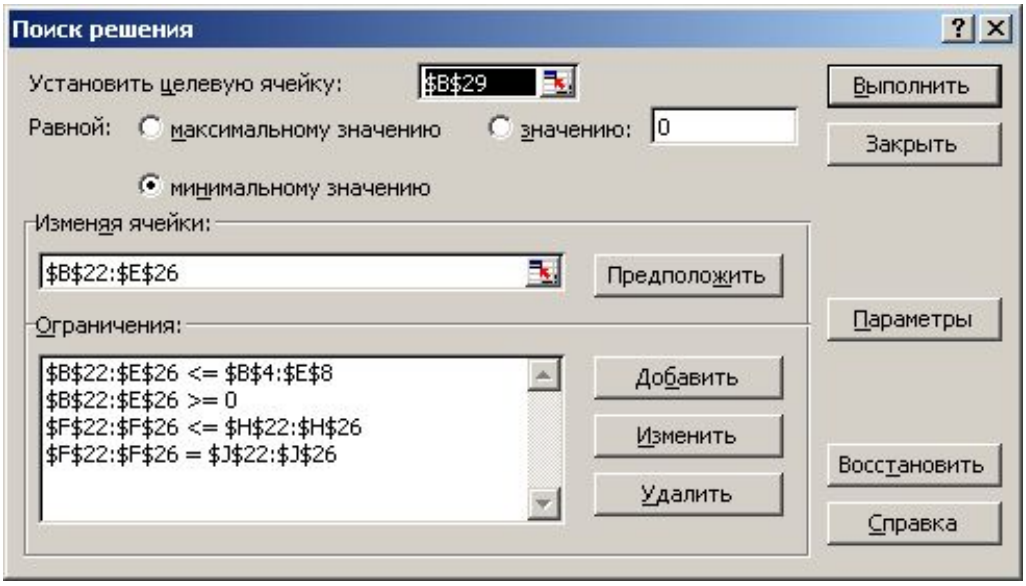
Нажмите "**Добавить**".

Четвертое ограничение

Объем перевозки по каждому товару из каждого пункта отправления не должен превышать имеющегося в данном пункте отправления запаса данного товара. В противном случае получилось бы, что можно увезти со склада больше, чем на нем есть, что невозможно. Следовательно, значения ячеек диапазона ***B22:E26*** (объемы перевозок) должны быть меньше или равными значениям соответствующих ячеек диапазона ***B4:E8*** (остатки товаров на складах). Условие в диалоге добавления ограничения должно выглядеть следующим образом:



Нажмите **OK** для завершения ввода ограничений. Получим следующий вид диалога "**Поиск решения**".



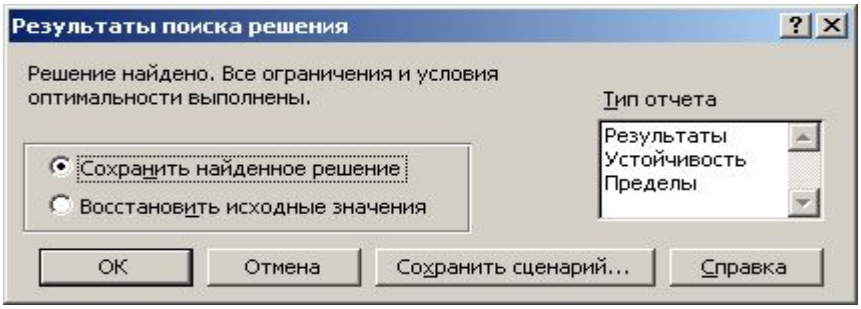
Настраиваются параметры поиска решения: нажмите кнопку **Параметры**. В появившемся диалоге "**Параметры поиска решения**" необходимо установить следующие параметры: Линейная модель, "**Оценки":** линейная, "**Разности":** прямые, "**Метод поиска":** Ньютона.

После этого необходимо нажать **ОК** для возвращения в основной диалог "**Поиск решения**".

Запускается процедура выполнение расчета: нажмите кнопку "**Выполнить**".

В результате система произведет поиск решения транспортной задачи в соответствии с настройками диалога "**Поиск решения**" и имеющимися входными данными и заданными ограничениями.

Если при текущих исходных данных, заданных ограничениях или параметрах настройки расчета решение найти не удается, то на экран будет выведено соответствующее сообщение. В этом случае необходимо либо изменить исходные данные, либо изменить введенные условия-ограничения, либо изменить параметры диалога "**Поиск решения**". Часто причиной невозможности найти решение являются неправильно заданные ограничения. Если решение найдено, пользователь увидит следующий диалог:



Нажмите **ОК**. Результаты проведенной операции будут представлены в форме, приведенной на рис. 5.16.

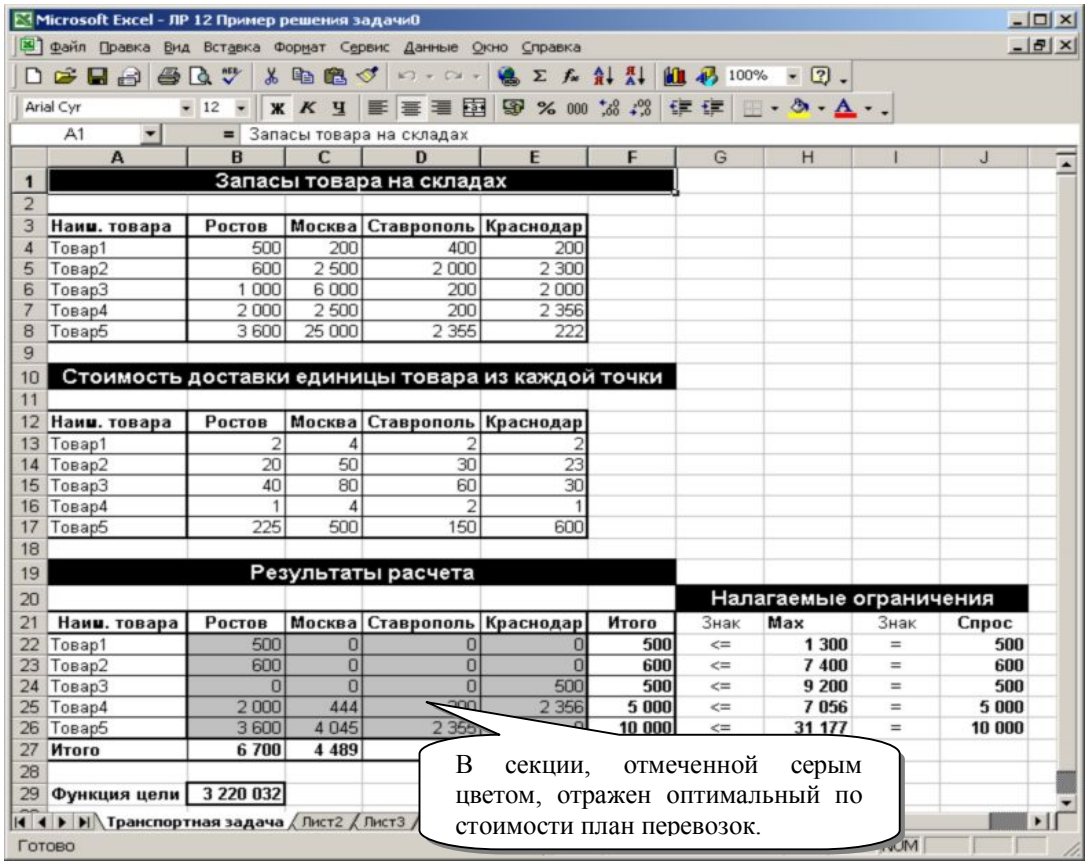


Рис. 5.16

Из рисунка видно, что получен оптимальный по стоимости план перевозок в заданной системе ограничений. При этом спрос на товары в пункте назначения полностью удовлетворен. Полученный результат позволяет сделать вывод, что "**Товар1**" и "**Товар2**" необходимо везти только из Ростова, "**Товар3**" - только из Краснодара, "**Товар4**" - в определенных количествах из каждого города, "**Товар5**" - в установленных количествах из пунктов Ростова, Москвы и Ставрополя.

Варианты заданий для самостоятельного решения

Вариант 1

Компания "ОРИОН" имеет пять заводов, которые производят однородную продукцию в следующих объемах:

Объемы производства продукции "Товар1"

№ п/п	Наименование завода	Объем производства, тыс. ед.
1	Завод1	300
2	Завод2	500
3	Завод3	200
4	Завод4	900
5	Завод5	100

Продукция распределяется по четырем оптовым базам, расположенным в различных местах. Расходы по транспортировке от каждого завода до каждой оптовой базы приведены в следующей таблице:

Транспортные расходы

Наименование завода	Оптовая база1	Оптовая база2	Оптовая база3	Оптовая база4
Завод1	2	2,5	4	4
Завод2	1	2,5	1	2
Завод3	2,6	4	5	1
Завод4	2	3	4	2
Завод5	2,5	2	5	2,6

Составить такой план перевозок, чтобы распределить всю произведенную продукцию по оптовым базам при минимальных транспортных расходах. Результат должен выглядеть так, как показано на рис. 5.17:

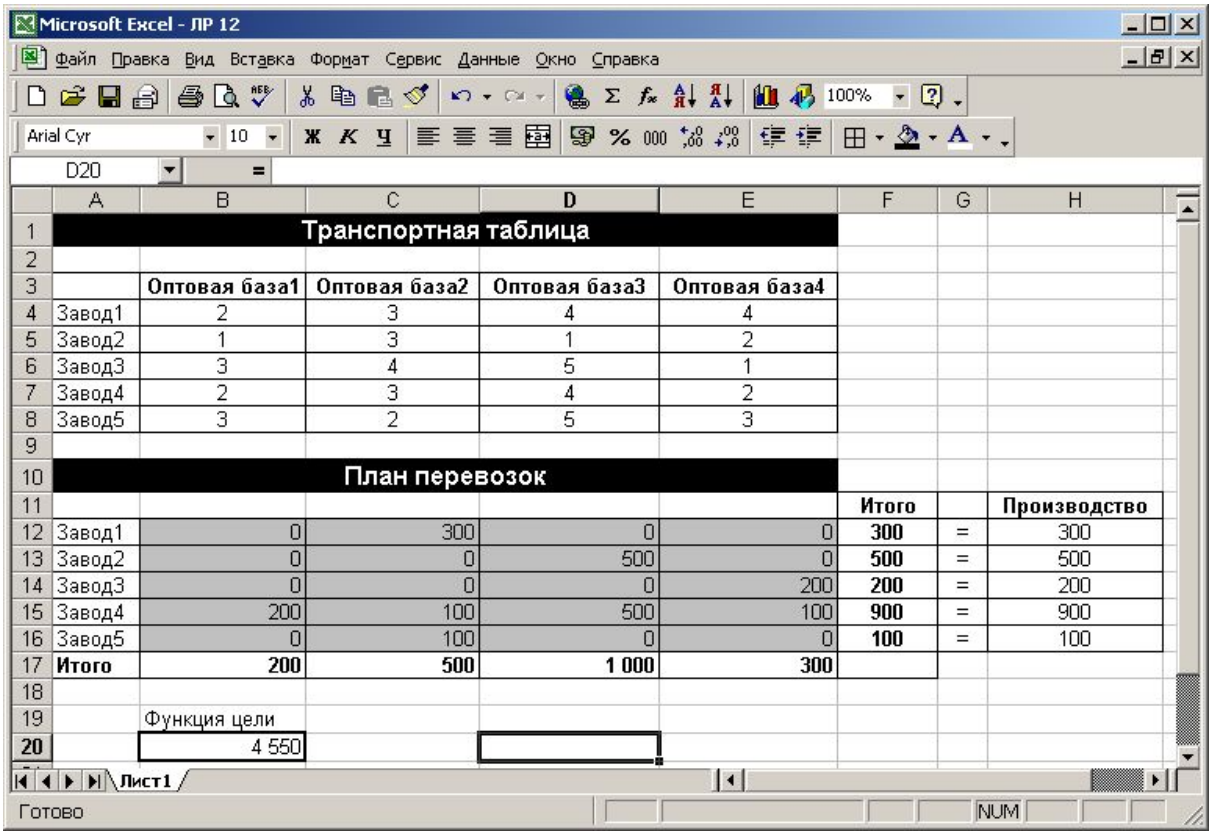


Рис. 5.17

Вариант 2

В пункте назначения *N* существует спрос на товары, представленный в следующей таблице:

Спрос на товары в пункте N

№ п/п	Наименование товара	Спрос, ед.
1	Товар1	8 000
2	Товар2	9 000
3	Товар3	15 000

На оптовых базах существуют запасы товаров, представленные в следующей таблице:

Запасы товаров на складах

№ п/п	Наименование товара	Склад1	Склад2	Склад3	Склад4	Склад5
1	Товар1	6 000	200	400	200	6 000
2	Товар2	6 000	2 500	2 000	2 300	2 000
3	Товар3	2 300	8 000	200	2 000	6 000

Потребность доставки товара в каждую точку:

№ п/п	Наименование товара	База1	База2	База3	База4	База5
1	Товар1	50	95	23	50	46
2	Товар2	79	12	61	88	38
3	Товар3	81	5	76	14	8

Требуется: Составить оптимальный по стоимости план перевозок, полностью удовлетворяющий спросу на товары в пунктах назначения (рис. 5.18).

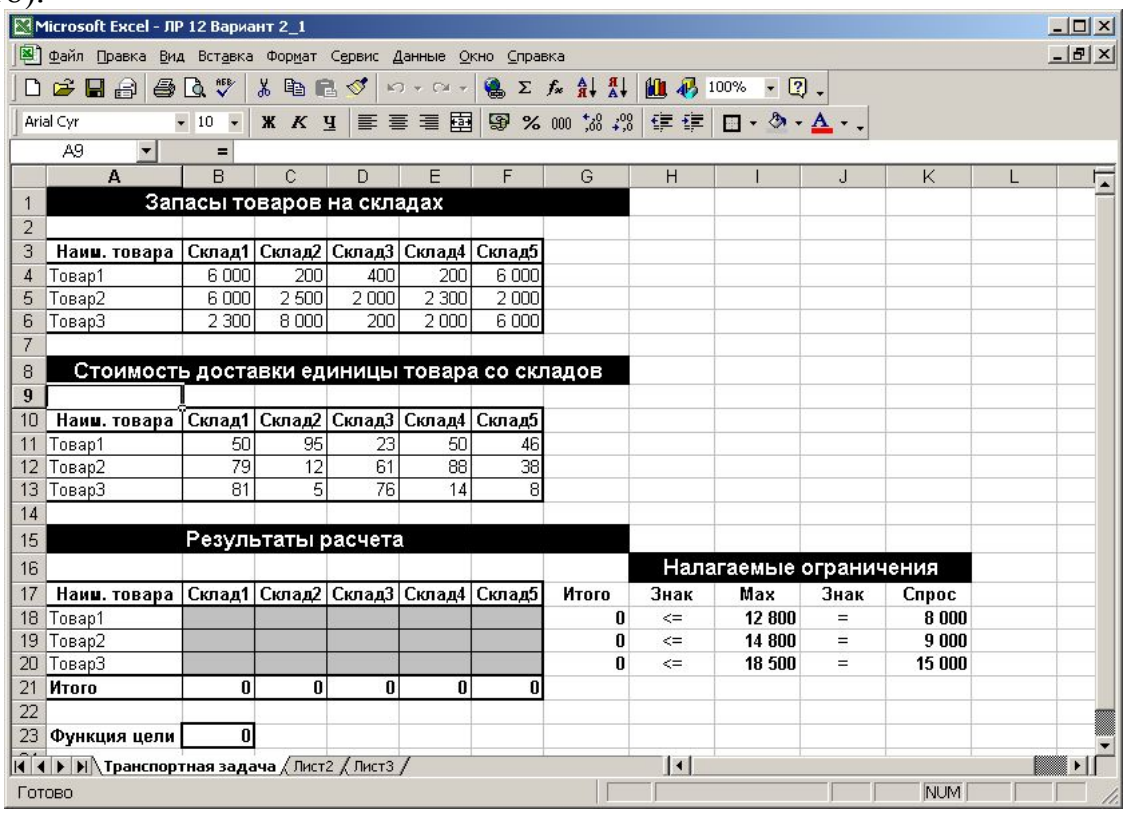


Рис. 5.18

Глава 6. Самостоятельные и курсовые работы

6.1. Основные требования

1. Общий объем пояснительной записки не должен превышать 20-25 страниц машинописного текста, в том числе введение – не более 2-х страниц.

Пояснительная записка к курсовой работе должна давать достаточно полное представление о принципе решения задачи моделирования системы с обоснованием правильности решения на ЭВМ (в случае ее использования). Записка иллюстрируется необходимыми схемами и таблицами. Эти схемы и таблицы входят в общий объем пояснительной записки и нумеруются.

2. Пояснительная записка к курсовой работе должна включать в указанной последовательности следующие разделы: **титульный лист**: **аннотацию** (реферат); бланк задания, подписанный руководителем и заведующим кафедрой; **содержание** (оглавление) с указанием страниц; **введение**; разделы и подразделы **основной части**; заключение; **список литературы**; **приложения** (при необходимости).

2.1. **Титульный лист** должен соответствовать установленному образцу.

2.2 **Аннотация** в краткой форме раскрывает содержание пояснительной записки к курсовой работе.

2.3. **Бланк задания**, полностью оформленный, должен содержать отзыв руководителя о курсовой работе студента и ее оценку.

2.4. **Содержание** включает наименование всех разделов курсовой работы, а также подразделов и пунктов, если они имеют наименование, с указанием номера страниц, на которых размещается начало материала разделов, подразделов, пунктов.

2.5. **Введение** содержит постановку задачи, анализ актуальности и цели выполняемой работы. Во введении дается краткий анализ возможных методов решения поставленной задачи, но так, чтобы он не заслонял основного содержания работы. Указываются литературные источники, по которым делается обзор, позволяющий судить, насколько полно изучена литература по затронутым проблемам. Обзор должен содержать краткую оценку изложенных материалов и принципов.

2.6. **Основная часть** состоит из разделов, в которых рассматривается существо проблемы, дается аналитический обзор возможностей исследования заданного объекта моделирования, обоснование выбранного подхода к моделированию, описание концептуальной модели, формализация и алгоритмизация модели, описание алгоритмов и программ, инструкции по использованию

программ при моделировании на конкретной ЭВМ, результаты моделирования, анализ полученных на модели результатов и выводы по их использованию для исследования и разработки объекта моделирования. При большом объеме графического и другого материала, необходимого для представления в записке, часть из него может быть вынесена в приложение к курсовой работе.

Конкретный состав вопросов, представляемых в основной части, определяется конкретным заданием для каждой курсовой работы.

2.7. **Заключение** должно содержать качественные и количественные (при необходимости) оценки результатов и основные выводы, сделанные по результатам выполненной работы. Должны быть отмечены все основные достоинства выбранного пути решения поставленной задачи, а также перечень оставшихся нерешенными проблем, рекомендации по дальнейшему развитию направлений их решения.

2.8. **Список используемой литературы** содержит перечень источников, используемых при выполнении курсовой работы. Указывают только те источники, на которые имеются ссылки в тексте пояснительной записки.

2.9. **Приложение** содержит вспомогательный материал, необходимый для более полного представления содержания основной части.

3. Пояснительная записка является основным документом, предъявляемым студентом при защите курсовой работы.

Пояснительная записка к курсовой работе располагается на одной стороне листа бумаги формата 210 х 297 мм. Поля: слева – 30 мм, справа, снизу, сверху – 20 мм. Размер шрифта – 14. Интервал между строками – одинарный. Отступ – 1, 25 мм.

Изложение текста должно быть кратким, четким и вестись от первого лица множественного числа (мы, нас).

Каждый новый раздел должен начинаться с новой страницы. Заголовки разделов печатаются полужирными прописными буквами по середине текста. Заголовки подразделов пишутся с абзаца, отступ слева 1,25 мм, строчными буквами (кроме первой прописной). В заголовке не допускаются переносы слов. Пробелы над заголовками и под ними – 2 интервала. Точку в конце заголовка не ставят. Если заголовок состоит из двух предложений, то их разделяют точкой. Заголовок подчеркивать нельзя.

Разделы в пределах всей пояснительной записки, а также подразделы и пункты имеют одинаковые номера, обозначенные арабскими цифрами без точки в конце, например: 1 – первый раздел; 2 – второй раздел; 2.2 – первый подраздел второго раздела; 2.1.1 – первый пункт первого подраздела второго. Введение и заключение не нумеруются.

В записке необходимо выдержать единые обозначения и размерности для используемых параметров, переменных и характеристик.

Номера рисунков состоят из номеров раздела и порядкового номера иллюстрации, разделенных точкой. Иллюстрации снабжаются краткими подрисуночными текстами. Иллюстрации располагаются так, чтобы их было удобно рассматривать (без поворота записи или поворачивая по часовой стрелке). Количество иллюстраций должно быть минимальным, но доступным для пояснения излагаемого материала.

Таблицы служат для оформления цифрового материала, приводятся после первого упоминания о них в тексте. На все таблицы должны быть ссылки в тексте. Каждая таблица должна иметь заголовок.

Формулы в записке выполняются с помощью редактора формул. Пояснения значений символов и числовых коэффициентов следует проводить непосредственно под формулами со слова "где" без двоеточия после него.

6.2. Примеры заданий на курсовые работы

Задание 1. Особенности проведения финансового анализа деятельности предприятий с использованием программной системы Audit Expert[1]

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию программной системы **Audit Expert** при решении задач финансового анализа деятельности предприятий.

В качестве источников информации могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемого комплекса с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

[1] Эта среда приведена всего лишь как пример. Преподаватель вправе предлагать подобные темы для любых современных сред, используемых для решения экономических задач.

Для наглядного представления работы анализируемой системы необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с программным комплексом Audit Expert. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению комплекса при решении различных задач финансового анализа предприятий.

3. Рекомендуемые источники

1. www.expert-system.ru
2. www.olap.ru
3. Журнал "Финансовый директор" 2005-2007 гг., раздел: Информационные технологии.
4. www.pro-invest.com/it/products/ae/industry.htm

Задание 2. Особенности проведения финансового анализа деятельности предприятий с использованием базовой технологии EXCEL

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию базовой технологии **EXCEL** при решении задач финансового анализа деятельности предприятий.

В качестве источников информации могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемого комплекса с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления работы анализируемой системы необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с базовой технологией **EXCEL.** В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению комплекса при решении различных задач финансового анализа предприятий.

3. Рекомендуемые источники

1. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 Специальное издание [Текст] / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

2. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

3. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер. с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

4. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности [Текст]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 512 с.

5. Маркарьян Э.А. Финансовый анализ [Текст] / Э.А. Маркарьян, Г.П. Герасименко. – М.: "ПРИОР", 1997. – 160 с.

6. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям [Текст]. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 336 с.

7. Шеремет А.Д. Методика финансового анализа [Текст] / А.Д. Шеремет, Р.С. Сайфулин. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 176 с.

Задание 3. Особенности использования Microsoft Excel в системах управления бизнесом

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию базовой технологии **EXCEL** при решении задач контроля и управления бизнесом.

В качестве источников информации могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемого комплекса с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления работы анализируемой системы необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с базовой технологией **EXCEL.** В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению комплекса при решении различных задач управления бизнесом.

3. Рекомендуемые источники

1. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 Специальное издание [Текст] / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864с.

2. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

3. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер. с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

4. Ковалев В.В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности [Текст]. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 512 с.

5. Маркарьян Э.А. Финансовый анализ [Текст] / Э.А. Маркарьян, Г.П. Герасименко. – М.: "ПРИОР", 1997. – 160 с.

6. Мелкумов Я.С. Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям [Текст]. – М.: ИНФРА-М, 1996. – 336 с.

Задание 4. Особенности использования программной системы Project Expert [2] для моделирования и анализа деятельности экономических объектов

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию программной системы **Project Expert** при решении задач анализа деятельности предприятий.

В качестве источников информации могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемого комплекса с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления работы анализируемой системы необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с программным комплексом Audit Expert. В заключение к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению комплекса при решении различных задач финансового анализа предприятий.

3. Рекомендуемые источники

1. www.expert-system.ru
2. www.olap.ru
3. Журнал "Финансовый директор" 2005-2007 гг., раздел: Информационные технологии
4. www.pro-invest.com/it/products/ae/industry.htm

[2] Эта среда приведена всего лишь как пример. Преподаватель вправе предлагать подобные темы для любых современных сред, используемых для решения экономических задач.

Задание 5. Особенности создания презентаций с использованием базовых технологий EXCEL

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию базовой технологии **EXCEL** при решении задач создания презентаций.

В качестве источников информации могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемого комплекса с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления работы анализируемой системы необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с технологией **EXCEL.** В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению комплекса при решении различных задач создания презентаций.

3. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 Специальное издание [Текст] / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864с.

3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 6. Основные особенности применения вероятностно-статистических методов для моделирования экономических систем

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию вероятностно-статистических методов моделирования экономических систем.

В качестве источников информации наряду с рекомендуемыми могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемых подходов с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления анализируемых подходов и методов необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие табличных и графических материалов, позволяющих наглядно представить особенности использования отдельных процедур и операций моделирования с использованием рассматриваемых методов и подходов. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению проанализированных методов для решения задач моделирования экономических систем.

3. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст]: учебное пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.

3. Бережной В.И. Экономико-математические методы и модели в примерах и задачах [Текст] / В.И. Бережной, Е.В. Бережная. – Ставрополь: Интеллект-сервис, 1996. – 188 с.

4. Советов Б.Я. Моделирование систем [Текст]: учебное пособие для втузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001. – 343 с.

5. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования [Текст]. – М.: Финансы и статистика, 1979. – 199 с.

Задание 7. Основные особенности применения оптимизационных методов и моделей в управлении экономическими системами

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с имеющимися данными по использованию оптимизационных методов и моделей в управлении экономическими системами.

В качестве источников информации наряду с рекомендуемыми могут служить специализированная литература, информация на соответствующих сайтах Интернета и другие доступные источники.

Конечной формой представления полученных данных является литературный обзор с соответствующим анализом особенностей технологии использования указанного комплекса при решении задач финансового анализа. Обзор должен быть снабжен результатами анализа положительных и отрицательных сторон применения системы при решении поставленных задач. Желательно представить результаты сравнения рассматриваемых подходов с другими известными системами, применяемыми для тех же целей (по литературным источникам).

Для наглядного представления анализируемых подходов и методов необходимо привести практические примеры по данным, сформированным автором, и сделать анализ получаемых результатов.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие табличных и графических материалов, позволяющих наглядно представить особенности использования отдельных процедур и операций моделирования с использованием рассматриваемых методов и подходов. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению проанализированных методов для решения задач моделирования экономических систем.

3. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Бережная Е.В. Математические методы моделирования экономических систем [Текст]: учебное пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.

3. Бережной В.И. Экономико-математические методы и модели в примерах и задачах [Текст] / В.И. Бережной, Е.В. Бережная. – Ставрополь: Интеллект-сервис, 1996. – 188 с.

4. Советов Б.Я. Моделирование систем [Текст]: учебное пособие для втузов / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 2001. – 343 с.

5. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования [Текст]. – М.: Финансы и статистика, 1979. – 199 с.

Задание 8. Особенности и методы моделирования систем массового обслуживания с однородными заявками

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с современными подходами и методами моделирования систем массового обслуживания с однородными заявками.

В задании приводятся результаты разработки модели бензоколонки (Приложение А) с использованием исходных данных, формируемых в результате предварительных исследований, представленных в форме беседы предпринимателя с консультантом (разработчиком). Такая форма представления материала предполагает более доходчивое понимание студентами самой сути и содержания основных этапов построения модели, включая рассмотрение всех основных этапов, и ее использования для последующего анализа. В Приложении А приводится также пример решения поставленной задачи моделирования. Приведенный материал Приложения А дает возможность самостоятельного выполнения сформулированных в части 3 заданий.

Необходимым условием успешного выполнения задания являются базовые знания использования языка **Visual Basic 6.0**. В качестве источников информации могут служить специализированная литература и рекомендованные ниже источники.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с разработанной программой. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению полученных результатов.

3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.1

В интегрированной среде Visual Basic 6.0 создайте программу "Модель СМО с однородными заявками", текст которой приведен ниже (Приложение Б). Проведите отладку программы с целью ликвидации формальных ошибок.

Задание 3.2

Проведите проверку программы расчетом. Подставьте те же исходные данные, которые были выбраны в приведенном ниже примере. Убедитесь в том, что результаты расчетов практически совпадают.

Задание 3.3

Проведите самостоятельное исследование закономерностей функционирования фирмы с помощью алгоритмической модели. Выберите исходные данные, проведите расчеты и проанализируйте результаты моделирования.

Задание 3.4 (контрольное)

Разработайте алгоритмическую модель процесса функционирования одноканальной системы массового обслуживания с отказами. Поток заявок - однородный, простейший. Время обслуживания заявок имеет заданное распределение. Поток отказов - поток Эрланга 2-го рода. Род отказа задан. Если отказы могут быть 1-го и 2-го рода, то задается вероятность появления отказа 1-го рода. Время ожидания заявки в очереди ограничено. Время работы системы также ограничено. Характеристики вариантов моделей приведены в таблице.

Характеристики вариантов модели

№ варианта	Вид распределения времени обслуживания заявок	Род отказа	№ варианта	Вид распределения времени обслуживания заявок	Род отказа
1	Нормальное	1-й	7	Показательное	2-й
2	Равномерное	1-й	8	Усеченное нормальное	2-й
3	Показательное	1-й	9	Нормальное	1-й и 2-й
4	Усеченное нормальное	1-й	10	Равномерное	1-й и 2-й
5	Нормальное	2-й	11	Показательное	1-й и 2-й
6	Равномерное	2-й	12	Усеченное нормальное	1-й и 2-й

4. Рекомендуемые дополнительные источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]. Специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем [Текст]: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2000.

4. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

5. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

6. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.

7. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст] / В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.

8. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

9. Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

Приложения к заданию 8

Приложение А

Модель системы массового обслуживания с однородными заявками (модель бензоколонки)

1. Разговор предпринимателя с консультантом

Предприниматель: - Я собираюсь вложить деньги в строительство новой бензоколонки. Однако точного представления о том, сколько автомашин будет ежедневно заправляться на этой колонке, у меня, конечно, нет. Их число, вероятно, может колебаться в некотором диапазоне. Но я хотел бы ориентировочно знать, какова должна быть оптимальная структура бензоколонки и на получение какой прибыли я могу рассчитывать? Можно ли дать ответы на эти вопросы с помощью математической модели?

Консультант: – В принципе можно. Поскольку входные данные имеют неопределенный характер, это должна быть алгоритмическая статистическая модель. Правда, такой модели у меня под руками нет, но ее можно разработать.

Предприниматель: – А что для этого нужно сделать?

Консультант: – Все начинается с разработки концептуальной модели. Прежде всего, нужно выбрать математическую схему, которая ближе всего подходит к такой экономической системе, как бензоколонка. Нужно также установить, что является входными параметрами модели, а что – выходными характеристиками. Далее нужно выбрать показатель и критерий эффективности будущей экономической системы.

Потом нужно разработать алгоритм и составить программу на алгоритмическом языке, отладить ее и убедиться в том, что она обеспечивает получение достоверных результатов. Наконец, нужно выбрать конкретные исходные данные и провести серию расчетов при разных значениях входных параметров. Анализ результатов моделирования позволит дать ответ на все Ваши вопросы.

Предприниматель: – А какая математическая схема больше подходит для описания работы бензоколонки?

Консультант: – Схема системы массового обслуживания, или сокращенно **СМО.** Для таких систем характерны три отличительные особенности:

1) имеется поток клиентов, желающих быть обслуженными (в данном случае это поток автомашин, желающих заправиться бензином);

2) имеются устройства или агрегаты, которые обеспечивают удовлетворение заявок клиентов (в данном случае одна или несколько раздаточных колонок);

3) имеется определенный набор правил обслуживания клиентов (в данном случае можно, например, считать, что все клиенты равноправны, т.е. никто не имеет права на заправку вне очереди).

СМО различаются прежде всего по числу мест или каналов обслуживания (одноканальная, двухканальная и т.д.).

Предприниматель: – Но я пока не знаю, сколько раздаточных колонок выгоднее иметь. Если они будут простаивать, я буду терпеть убытки.

Консультант: – Значит, в модели нужно сделать число каналов обслуживания переменным, т.е. включить его в состав входных параметров. В задачу моделирования будет входить определение оптимального числа каналов.

Предприниматель: – А от чего оно будет зависеть?

Консультант: – От соотношения между средним временем между поступлением заявок (приезда автомашин) и средним временем обслуживания (времени заправки), которые нужно задать как входные характеристики модели.

Предприниматель: – А откуда взять эти характеристики?

Консультант: – Среднее время обслуживания можно определить, понаблюдав за работой какой-нибудь действующей бензоколонки. А среднее время между соседними заявками зависит от интенсивности потока автомашин на том участке дороги, где Вы собираетесь строить бензоколонку.

Предприниматель: – Но ведь не все проезжающие автомашины нуждаются в заправке.

Консультант: – Вот и нужно хотя бы приблизительно оценить среднее количество автомашин, которые будут заправляться единицу времени (час). Это Ваша задача, а не разработчика модели.

Предприниматель: – Но поток автомашин неоднороден. Интервалы между соседними автомашинами непостоянны. Как же это будет учтено в модели?

Консультант: – Нужно выбрать подходящий для типичного потока автомашин на данном участке дороги закон распределения случайных величин времени между соседними автомашинами, заезжающими на заправку. Опыт показывает, что лучше всего такой поток описывается показательным распределением с заданной интенсивностью. А возможные значения случайного времени между соседними заявками будут определяться в модели с помощью датчика случайных чисел.

Предприниматель: – Но время обслуживания тоже непостоянно для всех автомашин.

Консультант: – Конечно. Это случайная величина, и нужно определить закон ее распределения. Понаблюдав за работой действующей бензоколонки, можно установить эмпирическое распределение реального

времени обслуживания. Но при построении первого варианта модели чаще всего обычно выбирают одно из стандартных распределений, которое ближе всего подходит к полученному эмпирическому распределению. В дальнейшем модель может быть уточнена.

Предприниматель: – Так какое распределение мы выберем для начала?

Консультант: – Я предлагаю остановиться на равномерном распределении времени заправки в выбранном диапазоне. Будем считать, что все автомашины заправляются одинаковым количеством бензина одного сорта.

Предприниматель: – А что еще нужно знать для построения модели?

Консультант: – Нужно высказать предположение о том, как будут себя вести клиенты, если им придется стоять в очереди. СМО обычно описывается одним из трех вариантов режима ожидания; с неограниченным ожиданием; с ограниченным ожиданием и без ожидания.

Предприниматель: – Вероятно, в нашем случае больше подойдет вариант с ограниченным ожиданием. Но я сейчас не могу сказать, сколько времени мои будущие клиенты согласятся ждать в очереди на заправку.

Консультант: – А этого и не требуется. Достаточно ввести в модель в качестве входной переменой максимальное время ожидания. Тогда в процессе моделирования заявка с временем ожидания, превышающим максимально допустимое, будет покидать систему необслуженной.

Предприниматель: – И это все входные переменные?

Консультант: – Осталось только ограничить период функционирования системы с таким расчетом, чтобы в течение этого периода поток заявок имел бы постоянную интенсивность.

Предприниматель: – Осталось ли что-либо неучтенным?

Консультант: – Конечно. Ведь всякая модель отражает только существенные, с точки зрения разработчика, свойства объекта-оригинала. Модель проще системы. Мы не учли, например, возможности возникновения отказов при работе раздаточных колонок, не учли перерывов в работе. Но это можно будет учесть при доработке модели.

Предприниматель: – А какие выходные характеристики должна иметь наша модель?

Консультант: – Это зависит от того, что мы примем в качестве показателя эффективности процесса функционирования системы. Это, между прочим, самый важный момент в процессе создания концептуальной модели исследуемой системы.

Предприниматель: – А что такое показатель эффективности?

Консультант: – Эффективность – это часто употребляемое слово, смысл которого не всегда правильно трактуется. В теории эффективности *показателем эффективности* называют ***меру степени достижения***

поставленной цели. Вы ведь вкладываете средства в строительство бензоколонки с целью получения прибыли?

Предприниматель: – Да, конечно. Но строительство сопряжено и с расходами, которые зависят от структуры бензоколонки, т.е. от количества раздаточных колонок. Как в этом случае может выглядеть показатель эффективности системы?

Консультант: – Нужно выбрать такой показатель эффективности, который отражал бы влияние на прибыль не только доходов, но и расходов. В первом варианте модели можно предположить, что все Ваши будущие клиенты будут заправлять примерно одно и то же количество бензина. Тогда доход будет определяться по формуле

$$Дох = C_1 \times N_{ОБС.СР.},$$

где *Дох* – средний доход за период функционирования системы; C_1 – средняя стоимость заправки одной автомашины; $N_{ОБС.СР.}$ – среднее число заправленных автомашин.

Расходы можно оценить по данным о стоимости строительства действующих бензоколонок. Предположим, что расходы связаны с числом каналов N_K некоторой функциональной зависимостью:

$$Расх = \Phi(N_K).$$

Итак, показатель эффективности для нашей модели имеет вид:

$$Эфф = Дох - Расх.$$

Предприниматель: – А нельзя ли сформировать безразмерный показатель эффективности? Меня сейчас не интересует абсолютная величина прибыли, мне важно установить с помощью модели структуру системы, которая обеспечивает получение максимально возможной прибыли.

Консультант: – Это очень просто сделать. Поделим доход и расход на коэффициент C_1. Получим следующее выражение для показателя эффективности:

$$C_{ОТН.СР} = N_{ОБС.СР} + \Phi(N_K),$$

где $C_{ОТН.СР}$ – средняя относительная прибыль; $\Phi(N_K)$ – безразмерная функциональная зависимость расходов от числа каналов.

Предприниматель: – Но кроме показателя эффективности существует еще критерий эффективности. Что он представляет собой для нашей модели?

Консультант: – В теории эффективности ***критерием эффективности*** называют правило, с помощью которого выбирается наивыгоднейший вариант структуры моделируемой системы. Если имеется несколько показателей эффективности, то критерий объединяет их в единое выражение.

В данном случае показатель один, а поэтому в качестве критерия естественно принять условие достижения максимума этого показателя. На практике это означает, что нужно перебрать несколько вариантов структуры модели при разных значениях входных параметров и установить, при каких условиях выбранный нами показатель эффективности будет достигать максимума. Для наглядности можно привести выражение для определения величины критерия эффективности. Оно будет иметь вид:

Критерий эффект.: $MAX\{C_{ОТН.СР}(u)\}$,

и в U,

где *u* – порядковый номер варианта расчета, принадлежащий множеству *U.*

Однако в самой алгоритмической модели эта формула использоваться не будет. Просто ею должен руководствоваться исследователь, производящий расчеты различных вариантов при переменных значениях входных параметров модели.

Предприниматель: – Надеюсь, на этом разработка концептуальной модели заканчивается? Хотелось бы теперь увидеть описание модели в концентрированном виде.

Консультант: – Для этого достаточно прочитать следующий пункт данного раздела.

2. Концептуальная модель

Пусть имеется система массового обслуживания с переменным числом каналов N_K, которое может принимать любое значение в диапазоне от одного до пяти. Входной поток заявок — ***простейший,*** следовательно, время между соседними заявками имеет показательное распределение с известным математическим ожиданием (средним значением) $T_{З.СР}$.

Время обслуживания заявки в любом канале - величина случайная, имеющая показательное распределение с известным средним временем обслуживания $T_{ОБС.СР}$.

Все заявки однородны и независимы.

Правило (дисциплина) ***обслуживания*** состоит в том, что очередная заявка поступает в тот канал, который раньше других освободился. Если время ожидания начала обслуживания превышает заданную величину, $T_{ОЖ.\max}$, то заявка покидает систему необслуженной. Период функционирования СМО характеризуется величиной $T_{КОН}$.

Таким образом, входными характеристиками модели являются: число каналов N_K, среднее время между соседними заявкам $T_{ОБС.СР}$, среднее время обслуживания заявки $T_{З.СР}$, максимально допустимое время ожидания $T_{ОЖ.\max}$, период работы системы $T_{КОН}$, число случайных реализаций моделируемого процесса N_p.

Выходной характеристикой модели является среднее число обслуженных заявок $T_{ОБС.СР}$.

2.1. Выбор показателя и критерия эффективности

В качестве показателя эффективности работы системы целесообразно выбрать среднюю прибыль, определяемую по формуле

$$C_{СР} = C_1 \cdot N_{ОБС.СР} - C_2(N_K), \quad (1)$$

где C_1 – чистая прибыль, полученная в результате обслуживания одной заявки; $C_2(N_K)$ - издержки обслуживания всех заявок, зависящие от числа каналов.

Разделим обе части равенства (1) на величину C, получив следующее выражение для расчета показателя эффективности:

$$C_{СР.ОТН} = N_{ОБС.СР} - \frac{C_2}{C_1}(N_K), \quad (2)$$

где $C_{ОБС.СР}$ – средняя относительная прибыль.

Величину $\frac{C_2}{C_1}$ (отношение издержек обслуживания к чистой прибыли, полученной в результате обслуживания одной заявки) будем рассматривать как функцию числа каналов.

Предположим, что возможными вариантами этой функциональной зависимости являются: *а* - линейная зависимость; *б* - возрастающая зависимость с положительной 2-й производной и *в* - возрастающая зависимость с отрицательной 2-й производной (рис. 1).

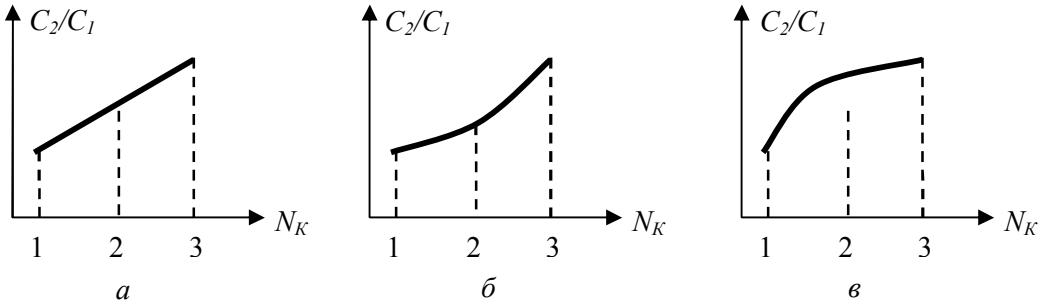


Рис. 1. Зависимость отношения C_2 / C_1 от N_k:
а – первый вариант; б – второй вариант; в – третий вариант

Выберем второй вариант. Примем в качестве конкретной зависимости издержек обслуживания от числа каналов следующую функцию:

$$\frac{C_2}{C_1}(N_K) = 1 - 0{,}5 \times N_K + 0{,}5 \times N_K^2. \quad (3)$$

Итак, для расчета показателя эффективности будем использовать зависимости (2) и (3).

В качестве критерия выбора наивыгоднейшей структуры *СМО* примем оптимальное число каналов, обеспечивающее максимум средней относительной прибыли:

$$K(N_K^*) = MAX\left[C_{CP.OTT}(N_K)\right] \quad (4)$$

$$N_K = 1, 2, 3,$$

где N_K – наивыгоднейшее число каналов.

3. Схемы алгоритмов модели

В качестве языка программирования для разработки компьютерной модели рассматриваемого процесса выбран Visual Basic 6.0.

Общий вид стартовой формы показан на рис. 2. Видно, что она включает ряд объектов управления, среди которых имеются командные кнопки "Расчет", "Очистка" и "Выход". Это обстоятельство определяет структуру алгоритма процедур обработки прерываний, показанную на рис. 3.

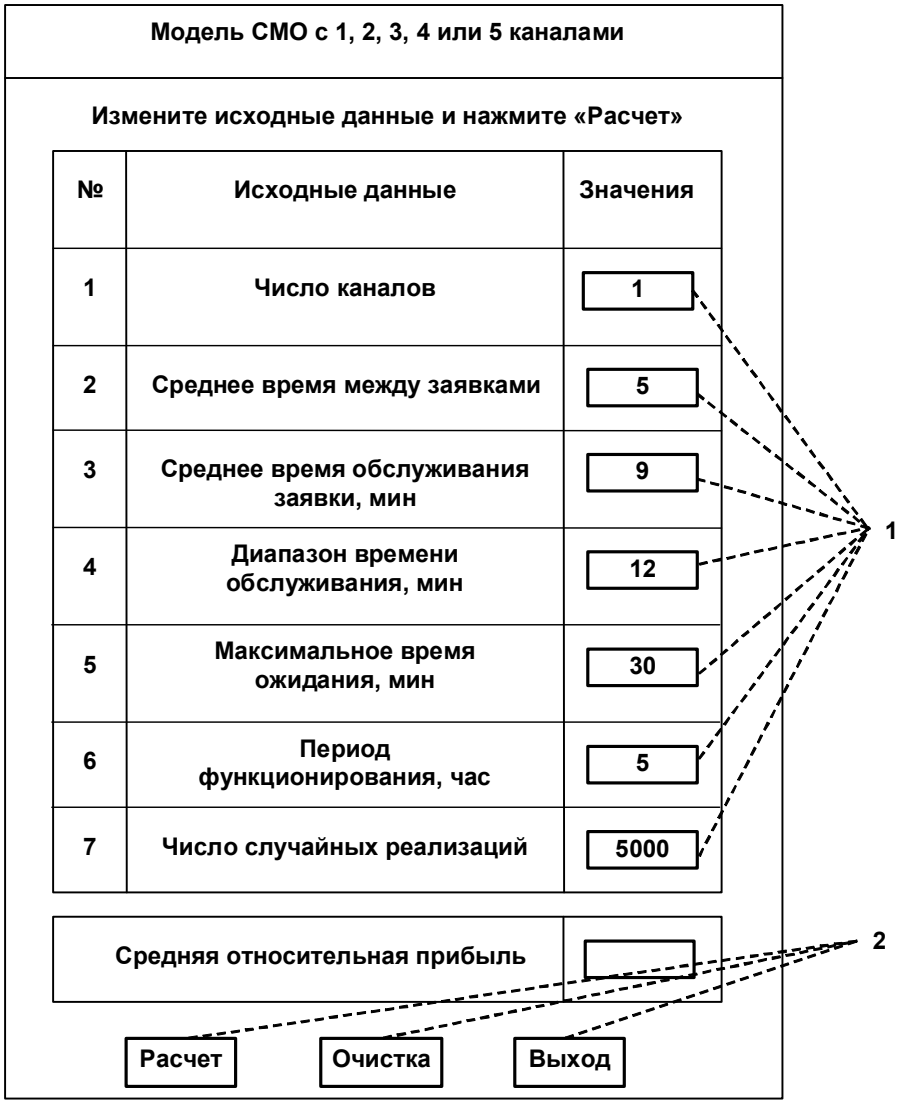


Рис. 2. Макет стартовой формы

1 – текстовые поля; 2 – командные кнопки

После нажатия кнопки "Start" активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

После нажатия кнопки "Расчет" производится вычисление показателя эффективности при заданных исходных данных.

При нажатии кнопки "Очистка" производится очищение текстового поля для вывода результата моделирования. Затем может быть произведено изменение исходных данных и проведение новых расчетов с использованием кнопки "Расчет".

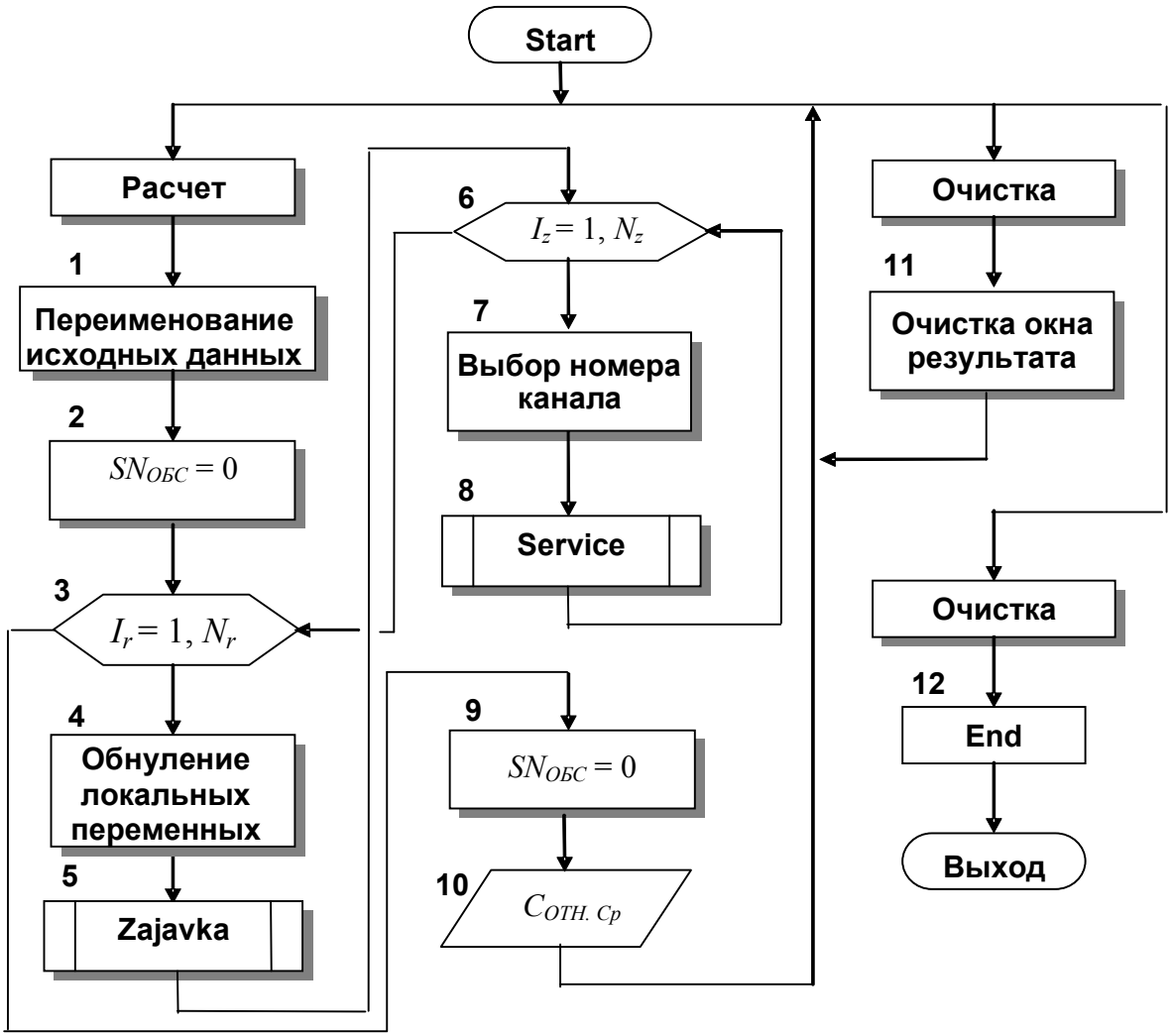


Рис. 3. Укрупненная схема алгоритма процедур обработки объектов

При нажатии кнопки "Выход" работа программы прекращается.

С кнопкой "Расчет" связана процедура, которая выполняет следующие действия.

Оператор 1 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Оператор 2 обнуляет глобальную переменную $SN_{ОБС}$ - суммарное число обслуженных заявок. Оператор 3 начинает циклический перебор случайных реализаций. Оператор 4 в начале каждой случайной реализации обнуляет локальные переменные, к которым относятся: число

заявок, поступающих в одной реализации N_Z, число обслуженных заявок в каждом из имеющихся каналов $N_{ОБС.j}$ $(j = 1,N_k)$, начальные значения времени освобождения каналов T_{OKj} $(j = 1,N_k)$. Оператор 5 обращается к автономной процедуре формирования потока заявок. В результате работы этой процедуры формируется массив значений времен:

$$[T_З(1), T_З(2), T_З(3),..,T_З(N_{Зi})],$$

где $N_{Зi}$ - общее число поступивших заявок для i-й случайной реализации.

Оператор 5 является началом цикла обслуживания заявок. Оператор 7 производит выбор номера канала, который характеризуется наименьшим значением времени освобождения от обслуживания заявки.

Оператор 8 обращается к автономной процедуре обслуживания очередной заявки. На выходе этой процедуры определяется число обслуженных заявок в выбранном канале $N_{ОБС}(J_{min})$.

Оператор 9 служит для расчета суммарного числа обслуженных заявок во всех каналах и всех случайных реализациях.

После окончания цикла случайных реализаций оператор 10 выводит на экран значение выходной переменной – средней относительной прибыли по формуле

$$C_{ОБС.СР} = 1 + 0{,}5 \times N_K - 0{,}5 \times N_K^2.$$

Схема алгоритма процедуры формирования заявок показана на рис. 4.

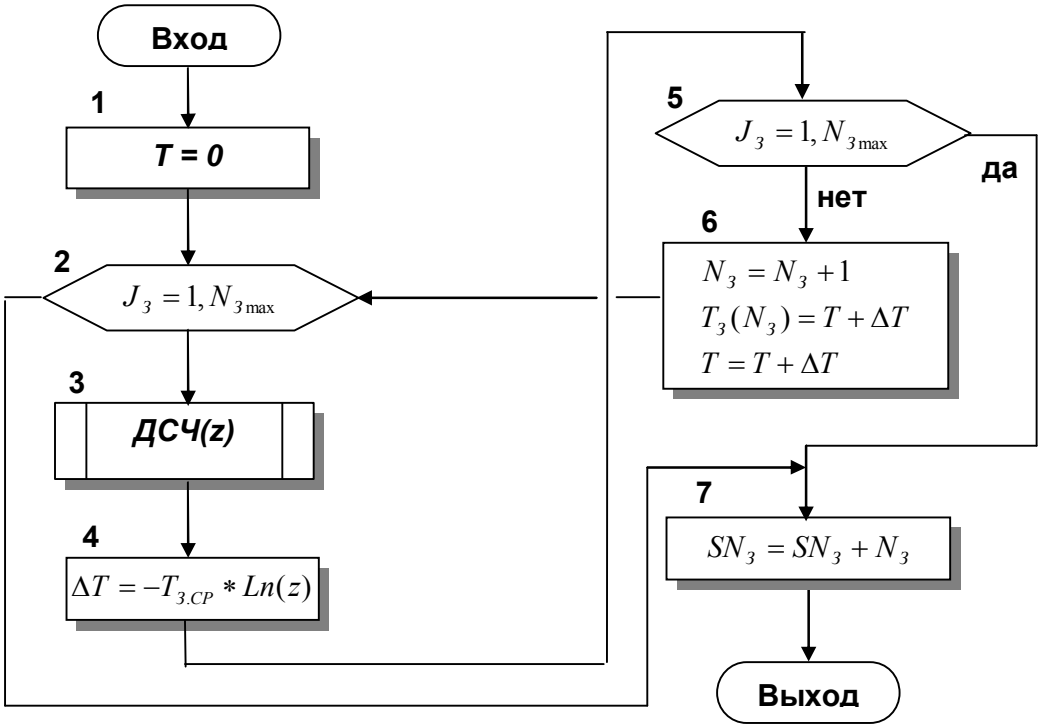


Рис. 4. Схема алгоритма процедуры формирования заявок

Оператор 1 устанавливает на нуль модельное время T. Оператор 2 является началом цикла формирования заявок. Оператор 3 обращается к

датчику случайных чисел, который вырабатывает возможное значение случайной величины *z,* равномерно распределенной в интервале (0,1).

Оператор 4 определяет возможное значение случайной величины времени поступления очередной заявки при условии, что среднее время между соседними заявками равно $T_{З.СР}$. Оператор 5 проверяет условие окончания процесса формирования заявок.

Оператор 6 подсчитывает число поступивших заявок, помещает время поступления каждой заявки в специальный массив и изменяет модельное время *T*.

Схема алгоритма процедуры обслуживания заявок показа на рис. 5.

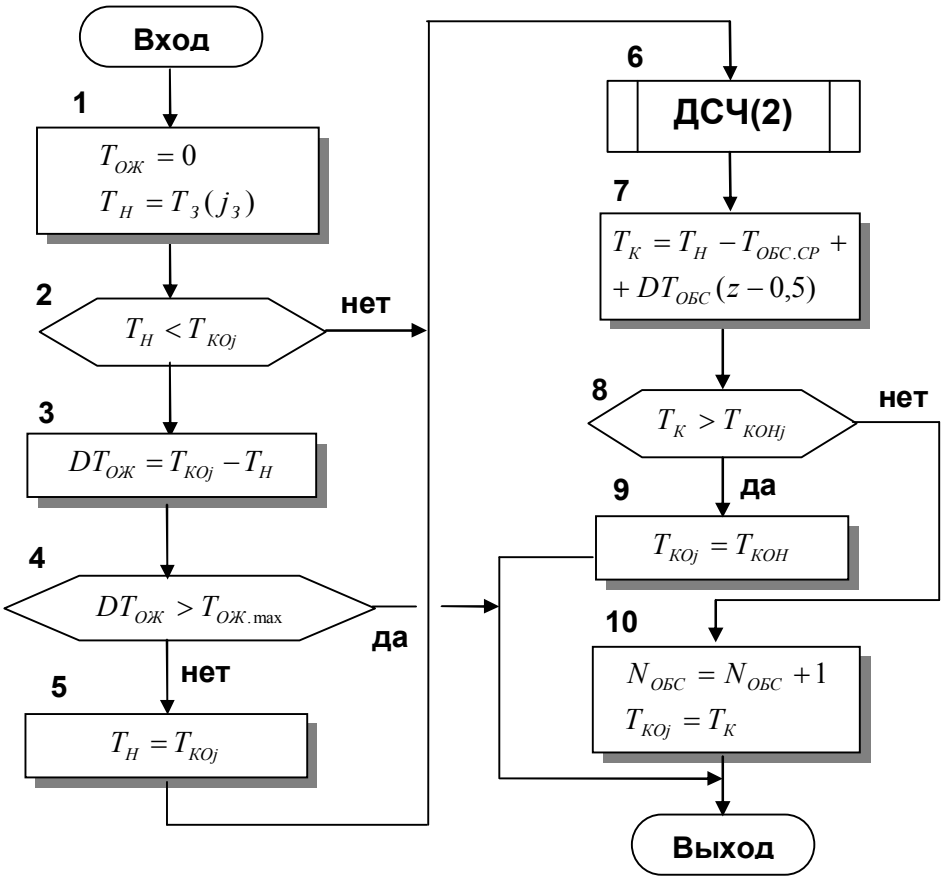


Рис. 5. Схема алгоритма процедуры обслуживания заявок

Оператор 1 обнуляет время ожидания начала обслуживания заявки $T_{ож}$ и присваивает времени начала обслуживания $T_н$ время поступления очередной заявки $T_3(j_3)$.

Оператор 2 производит проверку занятости канала. Начальное значение времени освобождения канала $T_{КОj}$ приравнивается нулю в главном модуле в блоке обнуления локальных переменных.

Если канал занят, то оператор 3 определяет время ожидания $T_{ож}$ как разность времени освобождения канала $T_{КОj}$ и времени поступления заявки $T_3(j_3)$. Оператор 4 проверяет условие, что время ожидания $T_{ож}$ не превышает допустимого $T_{ОЖ.max}$. Если это условие не выполняется, то

управление передается на конец процедуры и заявка остается необслуженной.

Оператор 5 служит для коррекции времени начала обслуживания заявки. Оно теперь должно равняться времени освобождения канала T_{KOj}. Оператор 6 обращается к датчику случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1), который вырабатывает возможное значение случайной величины z. Оператор 7 определяет возможное значение времени окончания обслуживания заявки $T_к$.

Оператор 8 проверяет условия окончания периода обслуживания, а оператор 9 фиксирует тот факт, что данный канал будет занят до конца рабочего дня. Оператор 10 увеличивает на единицу число обслуженных заявок в j-м канале и фиксирует время освобождения канала.

4. Пример решения задачи моделирования

Рассмотрим пример решения задачи исследования системы массового обслуживания с помощью разработанной имитационной модели. Выберем следующие входные параметры:

- среднее время между заявками – $T_{З\ ср}$ = 9 мин;
- диапазон времени обслуживания – $DT_{обс}$ = 12 мин;
- максимальное время ожидания – $T_{ож.max}$ = 30 мин;
- период функционирования – $T_{кон}$ = 5 ч;
- число случайных реализаций – N_p= 5000.

Варьируемые переменные:

- среднее время обслуживания заявок – $T_{обс\ ср}$ = 1; $1^1/_2$; 2; 3; 5 мин;
- число каналов обслуживания – N_K = 1; 2; 3; 4; 5.

Результаты расчетов приведены на рис. 6.

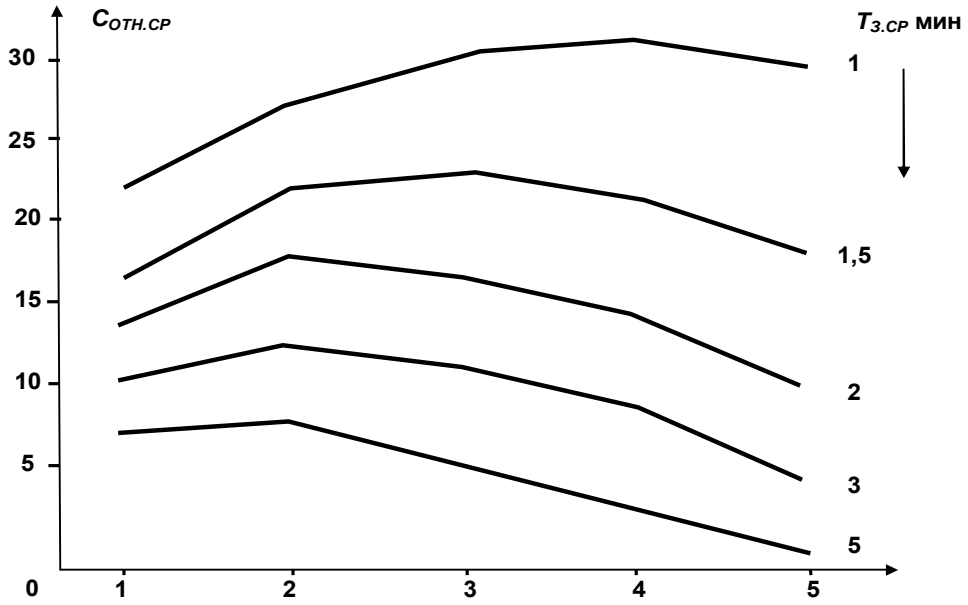


Рис. 6. Зависимость $C_{ОТН.СР}$ от числа каналов N_K и среднего времени между заявками $T_{З.СР}$

При выбранных исходных данных оптимальное число каналов, при котором достигается наибольшая прибыль, увеличивается с уменьшением среднего времени между заявками.

Приложение Б

Программа модели СМО с однородными заявками на языке Visual Basic 6.0

Стартовая форма Form l

Макет стартовой формы приведен на рис. 2 Приложения А.

1. Таблица свойств формы 1

Объект	Свойства	Установки
Форма 1	Name Caption	Form 1 Модель СМО с 1,2 или 5 каналами
Командная кнопка 1	Name Caption	Command1 Расчет
Командная кнопка 2	Name Caption	Command2 Очистка
Командная кнопка 3	Name Caption	Command3 Выход

2. Процедуры обработки объектов

```
"ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ МАССОВОГО
"ОБСЛУЖИВАНИЯ с 1, 2, 3, 4 или 5 каналами
"Однородными заявками и ограниченным ожиданием
‘---------------- Константы ----------------------------------------------------------
Const Nzmax = 100                                   ‘максимальное число заявок
Const NKmax = 5                                     ‘максимальное число каналов
‘---------------- Описание массивов- -------------------------------------------------
Dim Tz(Nzmax)                                       'массив времен поступления
Dim Nobs(NKmax)                                     'число обслуженных заявок в каналах
Dim TOK(NKmax                                       ‘времена освобождения каналов
Dim TZcp, Tobscp, Tfin, TWmax, TKmin, TH, TK, z, Ts
Dim SNobs As Long, Iz, Nz, Ir, Nr, J, Nkan, Jmin

Private Sub Commandl_Click()
   Nkan = Val(Textl): TZcp = Val(Text2): Tobscp = Val(Text3)
   DTobs = Val(Text4): TWmax = W(Text5): Tfin = Val(Text6):
Nr = Val(Text7)
     Call Raschet
End Sub
```

```
Sub Raschet()
'{---------------- процедура "Расчет" -------------------------}
SNob = 0                                  'сумматор числа обслуженных заявок
For Ir = 1 To Nr                          'начало цикла случайных реализаций
   'обнуление локальных переменных:
   Nz = 0                                 'обнуление числа заявок
   For i = 1 To NKmax
      Nobs(i) = 0: TOK(i) = 0
    Next
   Call ZAJAVKA                           'процедура "Поток заявок"
   For Iz = 1 To Nz                       'начало цикла обслуживания заявок
      'выбор номера канала:
      TKmin = 100
      For J = 1 To Nkan
        If ТОЩ J) < TKmin Then TKmin = TOK(J): Jmin = J
      NextJ
      IfNr=l Then Call Debug2
      Call SERVICE                        'процедура обслуживания заявки
   Next Iz                                'конец цикла обслуживания заявок
   For i = 1 To Nkan
        SNobs = SNobs + Nobs(i)           'суммарное число обслуженных заявок
        Nexti
   Nextlr                                 'конец цикла реализаций
        '....показатель эффективности:
        Cotn = SNobs / Nr - 1 + 0.5 * Nkan - 0.5 * Nkan * Nkan
        Forml.Text8.ForeColor = &HFF
        Forml.Text8 = Format$(Cotn, "0.0")
   End Sub

   Siib ZAJAVKAO                          'Процедура "Поток заявок"
      T = 0                               'модельное время
      For J = 1 To Nzmax                  'начало цикла формирования заявок
        z = Rnd( 1)                       'случайная величина с равномерным
                                          'распределением  в интервале (0,1)
        Ts = T - TZcp * Log(z)            'случайное время поступления заявки
'...проверка условия прекращения приема заявок:
        If Ts > Tfin * 60 Then Exit For
        Nz = Nz + 1                       'счетчик числа заявок
        Tz(Nz) = Ts                       'фиксированное время поступления заявки
        T = Ts                            'изменение модельного времени
      Next J                              'конец цикла формирования заявок
    End Sub
```

```
 Sub SERVICEO
'-------      Процедура "Обслуживание заявок"
J = Jmin
DTVteit = 0
TH = Tz(Iz)                                    'время начала обслуживания
 'проверка необходимости корректировки времени:
If Tz(Iz) < TOK(J) Then
     'корректировка времени начала обслуживания:
     DTWait = TOK(J) - Tz(Iz)                          'период ожидания

     If DTWait > TWmax Then Exit Sub
     TH = TOK(J)                                'время начала обслуживания
     End If
z = Rnd(l)                                 'случайная величина с равномерным
     'распределением в интервале (0,1)
TK = TH + Tobscp + DTods * (z - 0.5)       'время окончания обслуживания
     If TK > Tfin * 60 Then
     TOK(J) = Tfin: Exit Sub
    End If
     Nobs(J) = Nobs(J) + 1              'увеличение числа обслуженных заявок
     TOK(J) = TK                                'время окончания обслуживания
     'If Nr = 1 Then Call Debug4
End Sub

Private Sub Command2_Click()
     Text8 = ""
End Sub
Private Sub Command3_Click()
     End
End Sub
```

Задание 9. Особенности и методы создания модели управления запасами

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с современными подходами и методами создания и использования модели управления запасами.

В задании приводятся результаты разработки модели бензоколонки (Приложение А) с использованием исходных данных, формируемых в результате предварительных исследований, представленных в форме беседы предпринимателя с консультантом (разработчиком). Такая форма представления материала предполагает более доходчивое понимание студентами самой сути и содержания основных этапов построения модели, включая рассмотрение всех основных этапов, и ее использования для последующего анализа. В Приложении А приводится также пример решения поставленной задачи моделирования. Приведенный материал Приложения А дает возможность самостоятельного выполнения сформулированных в части 3 заданий.

Необходимым условием успешного выполнения задания являются базовые знания использования языка **Visual Basic 6.0**. В качестве источников информации могут служить специализированная литература и рекомендованные ниже источники.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с разработанной программой. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению полученных результатов.

3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.1

В среде Visual Basic 6.0 создайте исполняемый модуль программы "Модель управления запасами", текст которой приведен в Приложении Б. Проведите отладку программы с целью ликвидации формальных ошибок.

Задание 3.2

Проведите проверку программы расчетом. Подставьте те же исходные данные, которые были выбраны в приведенном ниже примере. Убедитесь в том, что результаты расчетов практически совпадают.

Задание 3.3

Проведите самостоятельное исследование закономерностей функционирования фирмы с помощью имитационной модели. Выберите

исходные данные, проведите расчеты и проанализируйте результаты моделирования.

4. Рекомендуемые дополнительные источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]. Специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем [Текст]: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2000.

4. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

5. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

6. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.

7. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст] / В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.

8. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

9. Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

Приложения к заданию 9

Приложение А

Модель управления запасами

1. Разговор предпринимателя с консультантом

Предприниматель: – Я хотел бы вложить средства в строительство склада для продажи автомашин. У меня уже есть контора, где будут оформляться документы на покупку, а затем покупатель будет отправляться на склад и получать автомашину. Я бы хотел разработать модель процесса работы склада.

Консультант: – На какие вопросы Вы хотите получить ответы с помощью модели?

Предприниматель: – Нужно установить, каким должно быть оптимальное количество автомашин, хранящихся на складе. Количество покупателей, приобретающих товар каждый день, заранее неизвестно. Его можно только ориентировочно оценить. Поэтому неопределенным является и минимальный запас, который нужно поддерживать на складе ежедневно. С одной стороны, с увеличением запаса товара растут эксплуатационные расходы. С другой стороны, при уменьшении запаса товара может возникнуть ситуация, при которой некоторые покупатели, оформившие покупку, не смогут получить товар к концу рабочего дня. По правилам, действующим на нашей фирме, в этом случае нужно выплачивать покупателям неустойку в довольно крупных размерах. В то же время организация подвоза новых партий товара требует нескольких дней и сопряжена с дополнительными затратами.

Консультант: – Зависят ли затраты на доставку дополнительной партии товара от ее объема?

Предприниматель: – Да, конечно. Стоимость затрат на хранение товара пропорциональна количеству автомашин, находящихся на складе в данный день. Стоимость затрат на доставку товара пропорциональна объему партии. Стоимость затрат, вызванных дефицитом товара, пропорциональна количеству покупателей, спрос которых остался неудовлетворенным.

Консультант: – Все ясно. С точки зрения разработчика моделей, задача заключается в создании алгоритмической модели процесса функционирования сложной системы с целью оптимизации ее параметров. В данном случае условием оптимальности будет условие минимизации затрат на содержание склада в течение определенного периода времени.

Предприниматель: – А к какому классу будет относиться такая модель? Будет ли она моделью системы массового обслуживания?

Консультант: – Процесс, который Вы описали, не содержит характерных признаков системы массового обслуживания. Здесь нет

потока заявок, нет явного описания процесса обслуживания, отсутствуют и правила обслуживания. Однако это, несомненно, должна быть имитационная статистическая модель, так как среди входных переменных имеются случайные переменные. Одна из них – случайное число продаваемых ежедневно автомашин (ежедневный расход товара). Вторая – случайное число дней, затраченных на организацию поставки дополнительной партии товара. Для этих величин нужно подобрать подходящие по физическому смыслу стандартные распределения. Все остальные входные переменные могут задаваться как постоянные величины или варьировать для различных вариантов расчета.

Предприниматель: – Для величины ежедневного спроса я могу указать только возможный диапазон ее изменения. Речь может идти о сотнях покупателей в день с некоторым отклонением в ту и другую сторону.

Консультант: – Это уже кое-что. Поскольку количество покупателей – это дискретная случайная величина, здесь больше всего подошло бы так называемое биномиальное распределение, которое при большом числе возможных значений (что мы и имеем в данном случае) может быть успешно заменено нормальным распределением.

Его характеризуют двумя параметрами: математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением числа покупателей. Единственное дополнительное условие заключается в том, что полученное возможное значение случайной величины нужно округлить до целой величины.

Предприниматель: – Очевидно, так же можно подойти и к выбору вида распределения для случайной величины времени доставки партии товара?

Консультант: – Да, конечно. Здесь также можно использовать вместо биномиального распределения дискретной случайной величины нормальное распределение непрерывной случайной величины. Однако в данном случае диапазон возможных значений числа дней на поставку товара невелик, и поэтому такая аппроксимация является менее точной, чем для количества покупателей. Характеристиками распределения являются математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени доставки партии товара. Естественно, что и в этом случае возможное значение случайной величины должно быть округлено до целого числа.

Предприниматель: – Так какие же характеристики нужно знать, чтобы можно было разработать модель?

Консультант: – Давайте перечислим. К входным переменным следует отнести следующие величины:

1. средний ежедневный спрос и среднее квадратическое отклонение ежедневного спроса;

2. среднее время доставки дополнительной партии товара и его среднее квадратическое отклонение;
3. стоимость хранения единицы товара на складе в течение одних суток;
4. стоимость затрат на доставку единицы товара;
5. затраты, связанные с дефицитом каждой единицы товара;
6. начальный уровень запаса товара;
7. период работы склада.

Итого получилось семь входных переменных. К ним нужно добавить две варьируемые переменные:

- объем дополнительной партии товара;
- критический уровень запаса товара, при достижении которого администратор склада должен заказывать новую партию.

Предприниматель: – А что будет определяться на выходе модели?

Консультант: – В качестве выходной величины можно использовать средние затраты на содержание склада за заданный период времени.

Предприниматель: – Средняя величина затрат для меня не является полной характеристикой работы склада. Мне важно знать, каков может быть верхний предел затрат. Это необходимо для того, чтобы избежать банкротства фирмы.

Консультант: – Действительно, среднее значение случайной величины не является ее полной характеристикой. Нужно еще учесть разброс этой величины. Поэтому в качестве показателя эффективности моделируемого процесса целесообразно выбрать максимальные гарантированные затраты с заданным уровнем гарантии.

Предприниматель: – А что характеризует такой показатель?

Консультант: – Он представляет собой максимальный уровень затрат, которые с заданной надежностью не могут быть превышены при длительном использовании склада. В какие-то периоды склад может работать с относительно малыми затратами, в какие-то с большими затратами. Но практически никогда затраты не превзойдут величины выбранного показателя эффективности.

Предприниматель: – Ну что же, такой показатель меня устраивает. Только мне пока не ясно, каков должен быть уровень надежности?

Консультант: – Это зависит от того, какова Ваша "склонность к риску". Если Вы не хотите рисковать, то должны ориентироваться на высокий уровень надежности, порядка 0,99. Это означает, что только в одном из ста периодов функционирования склада затраты превысят величину показателя эффективности. Если Вы согласны на определенный риск, то можно выбрать уровень надежности 0,9. Тогда уже в десяти случаях из ста затраты превысят величину показателя эффективности.

Предприниматель: – Но кроме показателя существует еще критерий эффективности. Что он будет представлять собой в нашей модели?

Консультант: – Вопрос о выборе критерия эффективности возникает только тогда, когда имеется несколько вариантов или стратегий использования системы. В данном случае под стратегией мы можем подразумевать вариант сочетаний значений варьируемых переменных: объема партии товара и критического уровня товара, при достижении которого необходимо заказывать дополнительную партию. Критерием может быть условие минимума показателя эффективности при изменении варьируемых переменных.

2. Концептуальная модель

Имеется склад, где хранится запас однотипного товара. Начальный уровень запаса равен $N_{УР}$. В результате удовлетворения ежедневного спроса происходит уменьшение запаса на случайную величину, имеющую нормальное распределение с известными характеристиками: математическим ожиданием $M_Д$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_Д$. Затраты на хранение единицы товара в течение суток составляют $\$C_1$.

Если на складе не останется товара, то администрации склада придется уплатить прибывшим покупателям компенсацию в размере $\$C_3$ за каждую недостающую единицу товара по отношению к заказанному количеству.

Чтобы избежать затрат, вызванных дефицитом товара, администрация склада периодически подает заявки на поставку дополнительных партий товара выбранного объема *Part.* Подача заявки производится в момент, когда уровень запаса товара снизится до выбранного уровня UR_{min}. Время выполнения заявки является случайной величиной с нормальным распределением и известными характеристиками M_T и s_T. Затраты на поставку единицы товара составляют $\$C_2$. Цикл работы склада составляет T_D дней.

Требуется разработать математическую модель, которая бы описывала возможный реальный процесс, позволяла изучать его закономерности и выбирать наивыгоднейший режим работы склада, обеспечивающий минимальные затраты на его содержание.

В частности, требуется установить:

- оптимальный уровень запаса UR_{min}, при достижении которого необходимо подавать заявку на поставку партии товара;
- оптимальный объем партии товара *Part.*

В качестве ***показателя эффективности*** моделируемого процесса целесообразно выбрать максимальные гарантированные затраты на содержание склада (с заданным уровнем гарантии), определяемые по формуле

$$C_{gar} = M_C + K_\alpha \cdot \sigma_C,$$

где M_c – средние затраты на содержание склада в течение периода T_D дней;

σ_C – среднее квадратическое отклонение затрат на содержание склада;

K_α – квантиль, зависящий от уровня гарантии а (K_a = 1,28 при a = 0,9).

В качестве ***критерия выбора оптимального режима работы склада*** может быть принят ***минимум максимальных гарантированных затрат:***

$$K\left(UR^*_{\min}, Part^*\right): MIB\left\{\left(UR_{\min}, Part\right)\right\},$$

где $UR^*_{\min}$ – оптимальное значение уровня запаса товара, при достижении которого необходимо подавать заявку на поставку новой партии; $Part$ – оптимальный объем партии товара.

3. Алгоритм модели

В качестве языка программирования для разработки компьютерной модели рассматриваемого процесса выбран Visual Basic 6.0.

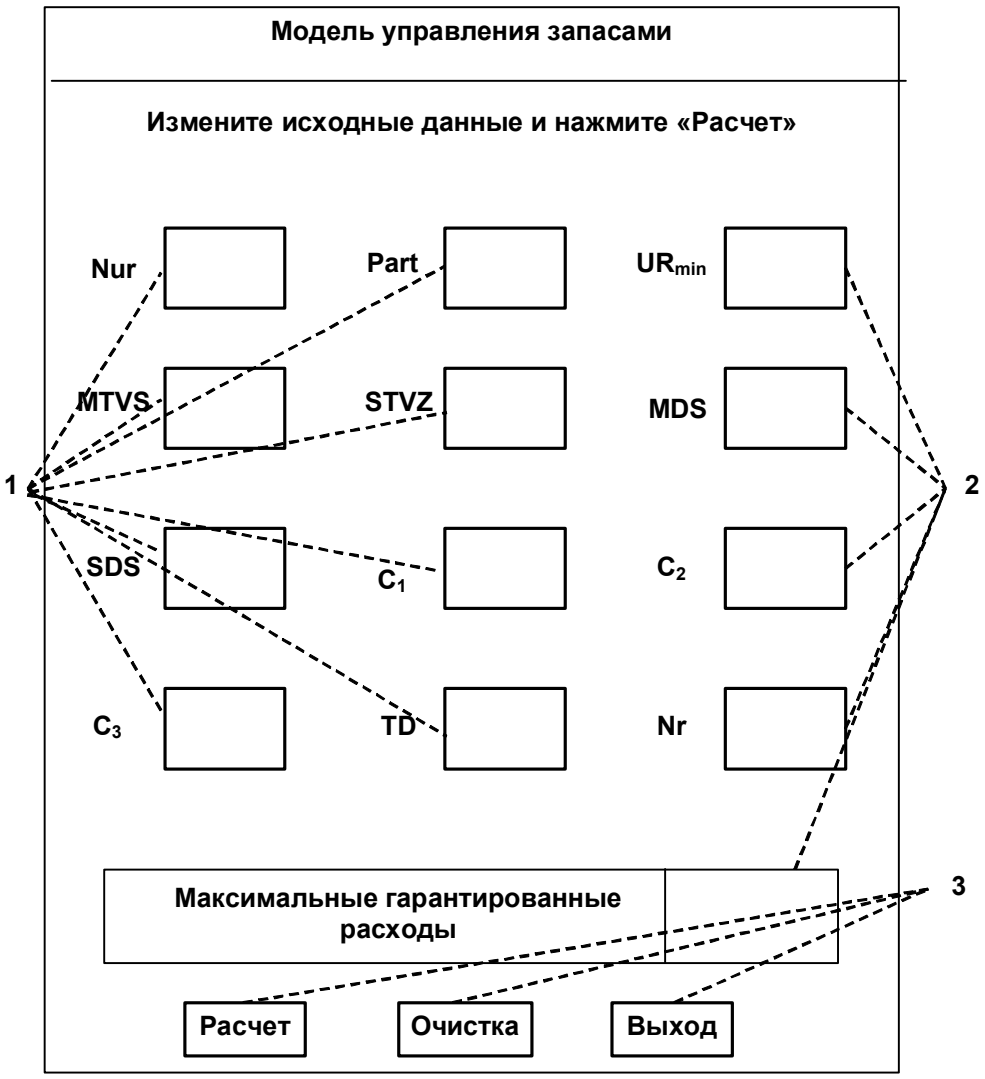


Рис. 1. Макет стартовой формы:
1,2 – текстовые поля; 3 – командные кнопки

Общий вид стартовой формы показан на рис. 1. Она включает следующие объекты управления:

1 – текстовое поле "Начальный уровень товара";
2 – текстовое поле "Объем партии товара";
3 – текстовое поле "Среднее время выполнения заказа";
4 – текстовое поле "СКО времени выполнения заказа";
5 – текстовое поле "СКО дневного расхода";
6 – текстовое поле "Стоимость хранения единицы товара"
7 – текстовое поле "Штраф за отсутствие единицы товара"
8 – текстовое поле "Период работы склада";
9 – командную кнопку "Расчет";
10 – командную кнопку "Очистка";
11 – командную кнопку "Выход";
12 – текстовое поле "Критический уровень товара";
13 – текстовое поле "Средний дневной расход";
14 – текстовое поле "Стоимость доставки единицы товара";
15 – текстовое поле "Число случайных реализаций";
16 – текстовое поле "Результат расчета".

Схема алгоритма процедур прерывания, связанных с объектами стартовой формы, показана на рис. 2.

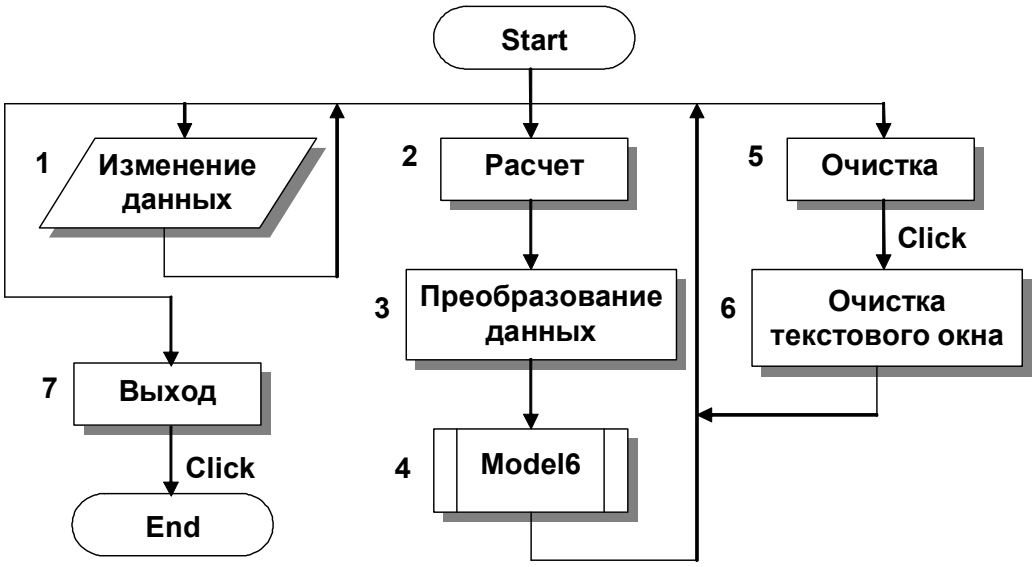


Рис. 2. Схема алгоритма процедур обработки объектов

После нажатия кнопки "Start" активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

Цифрой 1 обозначено действие, заключающееся в корректировке исходных данных. Необходимые изменения вносятся в соответствующие текстовые поля.

Цифрой 2 обозначено действие, заключающееся в нажатии (с помощью мыши) кнопки "Расчет". В процедуре, связанной с этой кнопкой, оператор 3 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Затем оператор 4 обращается к модулю общего назначения "Model6". Схема алгоритм этого модуля приведена на рис. 3.

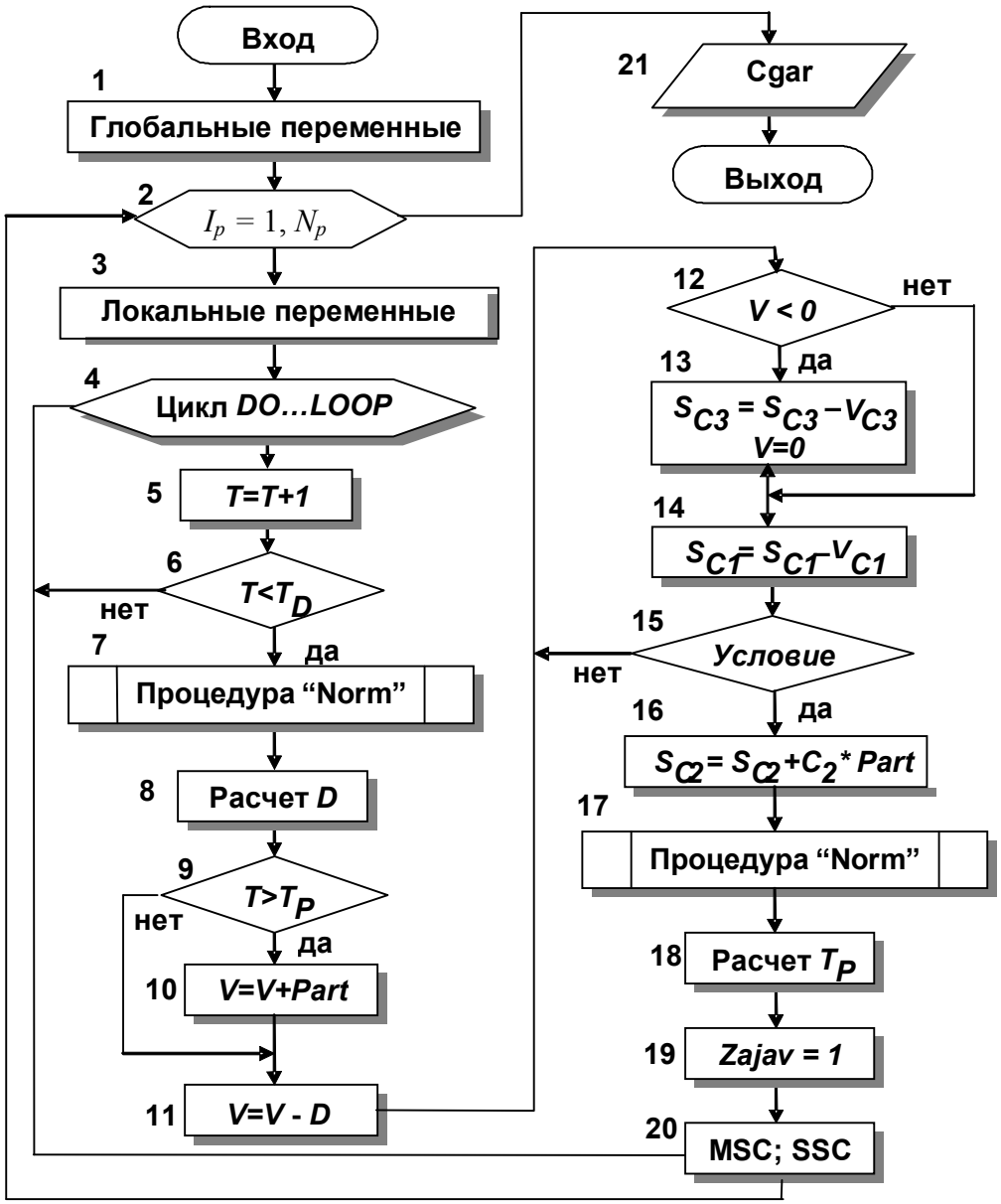


Рис. 3. Схема алгоритма модуля "Model6"

После окончания работы модуля и выдачи на экран результатов моделирования работа процедуры, связанной с кнопкой "Расчет", заканчивается. Программа вновь переходит в режим ожидания действий пользователя.

Цифрой 5 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Очистка". В процедуре, связанной с

ней, производится очищение текстового поля для вывода результата моделирования. Затем может быть произведено изменение исходных данных и проведены новые расчеты с использованием кнопки "Расчет".

Цифрой 7 на схеме обозначено действие, пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Выход". В результате работа программы прекращается.

В состав базового комплекта исходных данных входят:

- начальный уровень запаса товара – $N_{УР}$;
- средний ежедневный спрос товара – $M_Д$;
- среднее квадратическое отклонение ежедневного спроса – $\sigma_Д$;
- объем партии товара – *Part;*
- уровень запаса, при котором должна оформляться заявка на поставку дополнительной партии товара – UR_{min};
- среднее время поставки партии товара – M_T дней;
- среднее квадратическое отклонение времени поставки товара – σ_T дней;
- стоимость хранения единицы товара в течение суток – $\$C_1$;
- стоимость поставки единицы товара – $\$C_2$;
- • стоимость затрат на компенсацию отсутствия товара на складе – $\$C_3$ за каждую недостающую единицу;
- период функционирования склада – T_D дней;
- число случайных реализаций - N_P.

Блок 1 обеспечивает обнуление глобальных переменных, к которым относятся:

MS_C – начальное значение суммы случайных величин общих затрат на содержание склада для различных реализаций моделируемого процесса;

SS_C – начальное значение суммы квадратов случайных величин общих затрат.

Кроме того, в этом же блоке устанавливается начальное значение времени поставки дополнительной партии товара, которое выходит за пределы периода работы склада и равняется

$$T_{пост.0} = T_D + 1.$$

Оператор 2 представляет собой заголовок цикла случайных реализаций.

Блок 3 производит обнуление локальных переменных, к которым относятся:

S_{C1} – начальное значение суммарных затрат на хранение товара в течение всего периода работы склада для одной реализации;

S_{C2} – начальное значение суммарных затрат, связанных нехваткой товара в течение всего периода работы склада для одной реализации;

S_{C3} – начальное значение суммарных затрат на поставку дополнительных партий товара в течение всего период работы склада для одной реализации;

T – исходное значение счетчика дней (модельное время); *Zajav* — числовой признак отсутствия заявки на поставку дополнительной партии товара (если заявка подана, то *Zajav* = 1).

В этом же блоке планируемое время поставки партии товара приравнивается к его начальному значению, т.е. $T_{пост} = T_{пост\ 0}$. Наконец, текущий уровень запаса товара приравнивается к его начальному уровню:

$$V = N_{УР.}$$

Оператор 4 является началом циклического перебора дней работы склада. Оператор 5 увеличивает модельное время на один шаг (на одни сутки). Условный оператор 6 проверяет условие продолжения работы склада для каждой случайной реализации.

Оператор 7 обращается к процедуре *"Norm",* формирующей возможное значение нормированной, центрированной случайной величины с нормальным распределением. Оператор 8 определяет возможное значение величины случайного ежедневного спроса при заданном его математическом ожидании $M_Д$ и среднем квадратическом отклонении $\sigma_Д$. Результат расчета округляется до целого числа.

Условный оператор 9 проверяет условие наступления срока поставки дополнительной партии товара. Если этот срок наступил, то оператор 10 увеличивает текущий запас товара на величину объема партии *Part.* Одновременно здесь же числовой признак отсутствия заявки на поставку партии товара устанавливается на нуль. Кроме того, планируемое время поставки вновь выводится за пределы периода работы склада.

Оператор 11 определяет текущий уровень запаса товара на складе с учетом удовлетворения ежедневного спроса. В дальнейшем оператор 14 определяет затраты на содержание склада в текущие сутки.

Если количество заявок превысит текущий запас товара на складе, то в операторе 11 будет получено отрицательное число. В этом случае оператор 13 определяет затраты, связанные с дефицитом товара и устанавливает значение текущего запаса на нуль.

Оператор 15 проверяет выполнение одновременно двух условий: превышает ли текущий запас минимально допустимый (критический) уровень и была ли уже оформлена заявка на поставку дополнительной партии товара. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то в алгоритме происходит передача управления на начало цикла, т.е. оператору 4.

Если же одновременно выполняются оба условия, то группа операторов с 16-го по 19-й определяет затраты на поставку дополнительной партии товара.

Оператор 16 увеличивает текущие затраты на величину стоимости партии товара. Оператор 17 обращается к процедуре формирования возможного значения нормированной, центрированной случайной величины с нормальным распределением. Оператор 18 определяет возможное значение случайной величины времени выполнения заявки на поставку партии товара с учетом заданных параметров: среднего времени поставки и среднего квадратического отклонения времени поставки. При этом результат расчета округляется до целого числа. Оператор 19 устанавливает на единицу числовой признак подачи заявки.

Блок 20 служит для расчета суммарных характеристик затрат на содержание склада по формулам:

$$S_C = S_{C_1} + S_{C_2} + S_{C_3};$$

$$MS_C = MS_C + S_{C_2};$$

$$SS_C = SS_C + S_C \cdot S_C.$$

Блок 21 служит для определения показателя эффективности по формулам:

$$M_C = MS_C / N_P;$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1}}(SS_C - N_P \cdot M_C^2;$$

$$Gar = M_C + 1{,}28 \cdot \sigma_C.$$

4. График изменения уровня запаса товар

Типовой график изменения уровня запаса товара на складе с учетом дополнительных поставок показан на рис. 4.

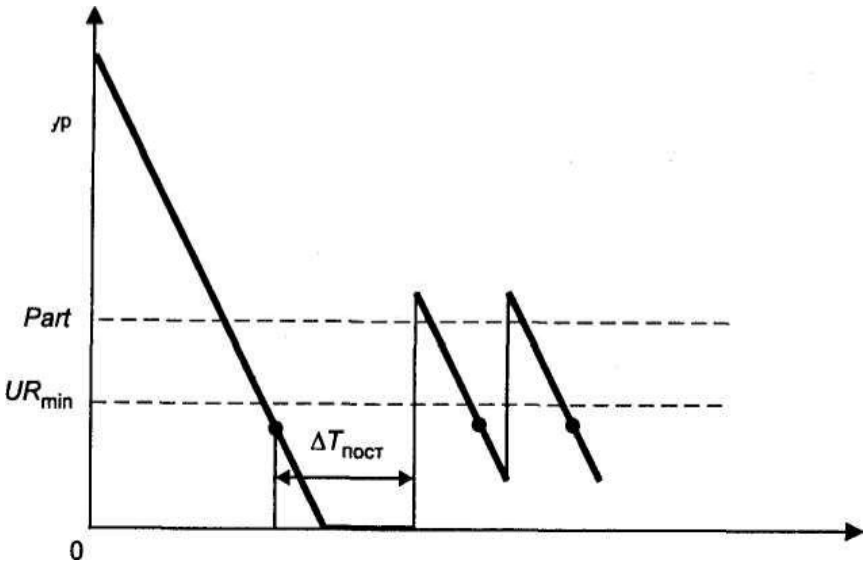


Рис 4. График изменения запаса товара на складе

В начальный момент на складе имеется $N_{УР}$ единиц товара. В этот момент числовой признак подачи заявки на поставку дополнительного

товара *Zajav=0,* а время поставки превышает время окончания работы склада.

В результате удовлетворения случайного ежедневного спроса уровень запаса товара снижается. Если уровень запаса товара снизится ниже величины UR_{min}, то подается заявка на поставку дополнительной партии товара объемом *Part* единиц. В этот момент числовой признак *Zajav* становится равным единице, а время выполнения поставки определяется по формуле

$$T_{ПОСТ} = T + \Delta T_{ПОСТ} = T + M_T + n \cdot \sigma_T ,$$

где T – текущее модельное время (в днях);

$\Delta T_{ПОСТ}$ – период выполнения заказа;

M_T – среднее время выполнения заказа;

σ_T – среднее квадратическое отклонение времени выполнения заказа;

n – возможное значение нормированной, центрированной случайной величины с нормальным распределением.

Когда модельное время становится равным $T_{пост}$, поступает партия товара, и текущий уровень запаса товара скачком увеличивается на величину *Part.* В этот момент числовой признак *Zajav* становится равным нулю, а время поступления партии товара вновь приравнивается величине $T_{пост0}$.

5. Пример решения задачи моделирования

Примем следующие исходные данные:

- начальный уровень запаса товара $N_{УР}$ = 1000;
- средний ежедневный спрос товара $M_Д$ = 100;
- • среднее квадратическое отклонение ежедневного спроса σ_D = 10;
- среднее время поставки партии товара M_T = 3 дня;
- среднее квадратическое отклонение времени поставки товара σ_T = 1день;
- стоимость хранения единицы товара в течение суток C_1 = 2$
- стоимость поставки единицы товара C_2 = *1$*;
- затраты на компенсацию отсутствия единицы товара на складе C_3= *10$;*
- период функционирования склада T_D = 30 дней;
- число случайных реализаций N_P = 2000. Варьируемые переменные:

− объем партии товара *Part* = 100; 200; 300; 400; 500;

− уровень запаса, при котором должна оформляться заявка на поставку дополнительной партии товара UR_{min} = 50; 150; 250; 350; 450; 550.

Результаты моделирования представлены в табл. 1.

Таблица 1

Зависимость максимальных гарантированных затрат от варьируемых переменных, тыс. долл.

Part	UR_{min}					
	50	**150**	**250**	**350**	**450**	**550**
100	234306	23438	22959	23020	23111	23111
200	21973	19751	19617	20459	22262	25382
300	21781	20200	21132	24282	29537	35024
400	25512	21414	13395	27222	32458	37665
500	23276	23120	25315	30165	35188	40188

Как видно из табл. 1, оптимальными параметрами исследуемой системы, при которых максимальные гарантированные затраты на содержание склада минимальны, являются:

объем партии товара *Part*= 200;

критический уровень запаса товара UR_{min}= 250.

Приложение Б

Программа модели управления запасами на языке Visual Basic 6.0

1. Стартовая форма frmZapasy

Макет стартовой формы приведен на рис. 1 Приложения А.

1.1. Таблица свойств

Объект	Свойства	Установки
Форма 1	Name Caption	frmZapasy Модель управления запас
Командная кнопка 1	Name Caption	cmdRashet Расчет
Командная кнопка 2	Name Caption	cmdClear Очистка
Командная кнопка 3	Name Caption	cmdExit Выход

1.2. Процедуры обработки объектов

```
Private Sub cmdRaschet_Click()
    Nur = Val(txtbegUr): Part = Val(txtParty)
    URmin = Val(txtURmn):MTVZ=Val(txtMTdos)
    STVZ=Val(txtSNdos):MDS=Val(txtMDcp)
    SDS=Val(txtSKOD): Cl=Val(txtC_l): C2=Val(txtC_2)
    C3=Val(txtC_3): TD=Val(txtTskl): Nr=Val(txtNreal)
    CaU Model3
End Sub

Private Sub cmdClear_Click()
    frmZapasy.txtResult = ""
End Sub

Private Sub cmdExit_Click()
    End
End Sub
```

2. Модуль общего назначения Model6.bas

```
Public Sub Model6()
' Главный модуль программы "Управление запасами"
MSC = 0                                  ' средние суммарные издержки
```

```
SSC = O                                  ' СКО суммарных издержек
TPO = TD + 1                             ' время выполнения заявки на поставку
For Ir = 1 To Nr                         ' начало цикла реализаций
TP=TP0      ' исходное значение времени поступления партии товара
Sc 1 =0                                  ' исходная сумма затрат на хранение товара
Sc2=0                                    ' исходная сумма затрат на поставку товара
Sc3=0       ' исходная сумма затрат, связанных с нехваткой товара
T=0                                      ' счетчик модельного времени, дни
Zajav=0                                  ' признак отсутствия запроса на поставку
V=Nur                                    ' начальный уровень текущего запаса
Do                                       ' начало цикла DO...LOOP
T = T + 1                                'модельное время
If T > TD Then Exit Do                   'условие окончания расчета
                                         ' текущей реализации
N = Norm                                 ' обращение к функции, вырабатывающей
                                         'случайную величину с нормальным распределением — Norm
D = Int(MDS + N * SDS)                   ' случайный дневной спрос
If T >= TP Then
TP = TPO                                 ' восстановление исходного времени постановки
Zajav = 0                                'восстановление признака отсутствия заявки
V= V + Part                              'увеличение запаса после постановки
End If
V= V - D                                 ' уменьшение запаса в результате i
If V < 0 Then                            'условие появления дефицита
Sc3 = Sc3-V*C3                           'определение издержек,
                                         ‘связанных с  дефицитом товара
V = 0                                    'обнуление запаса
End If
Scl = Scl+V*Cl                           ' затраты на хранение товара
IfV<UrminThen                            ' снижение запаса ниже нормы
IfZajav = OThen                          ' условие отсутствия оформленной
                                         'заявки на поступление товара
Sc2 = Sc2 + C2 * Part                    ' затраты на организацию поставки
N = Norm                                 ' обращение к функции, вырабатывающей
                                         ' случайную величину с нормальным распределением
TZ = Int(MTVZ + N * STVZ)                ' случайное время 'выполнения
                                         очередного заказа
Zajav =1                                 ' фиксация оформления заявки
End If
End If
Loop
SC = Scl + Sc2 + Sc3
MSC = MSC + SC                           ' суммарные издержки в Ir реализациях
```

```
SSC = SSC + SC * SC                    ' сумма квадратов издержек
Next Ir                                ' окончание цикла реализаций
                    ' результаты моделирования:
Ccp = MSC / Nr                         'средние затраты
If Nr > 1 Then
DispC = (SSC-Nr*Ccp*Ccp)/(Nr-l)        ' дисперсия затрат
          ' определение среднего квадратического отклонения затрат;
If DispOO Then SigC = Sqr(DispC) Else SigC = 0
End If
Cgar = Ccp+1.28*SigC      'максимальные гарантированные затраты
                 'вывод на экран результата расчета:
frmZapasy.txtResult = Format$(Cgar, "#####")
End Sub
Function Norm()
                'генератор нормального распределения;
 Sz = 0
For j = 1 To 12
z = Rnd(l)                    ' датчик случайных чисел с равномерным
                                  'распределением в интервале (0,1)

Sz = Sz + z
Nextj
Norm = Sz – 6                 ' центрирование случайной величины
End Function
```

Задание 10. Особенности и методы создания модели производственной фирмы

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с современными подходами и методами создания и использования модели производственной фирмы.

В задании приводятся результаты разработки модели производственной фирмы (Приложение А) с использованием исходных данных, формируемым в результате предварительных исследований, представленных в форме беседы предпринимателя с консультантом (разработчиком). Такая форма представления материала предполагает более доходчивое понимание студентами самой сути и содержания основных этапов построения модели, включая рассмотрение всех основных этапов, и ее использования для последующего анализа. В Приложении А приводится также пример решения поставленной задачи моделирования. Приведенный материал Приложения А дает возможность самостоятельного выполнения сформулированных в части 3 заданий.

Необходимым условием успешного выполнения задания являются базовые знания использования языка **Visual Basic 6.0**. В качестве источников информации могут служить специализированная литература и рекомендованные ниже источники.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с разработанной программой. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению полученных результатов.

3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.1

В среде Visual Basic 6.0 создайте исполняемый модуль программы "Модель производственной фирмы", текст которой приведен в Приложении Б. Отладьте программу с целью ликвидации формальных ошибок.

Задание 3.2

Проведите проверку программы расчетом. Подставьте те же исходные данные, которые были выбраны в приведенном ниже примере. Убедитесь в том, что результаты расчетов практически совпадают.

Задание 3.3

Проведите самостоятельное исследование закономерностей функционирования фирмы с помощью имитационной модели. Выберите исходные данные, проведите расчеты и проанализируйте результаты моделирования.

4. Рекомендуемые дополнительные источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]. Специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем [Текст]: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2000.

4. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

5. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

6. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.

7. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст] / В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.

8. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

9. Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

Приложение к заданию 10

Приложение А

Модель производственной фирмы

1. Разговор предпринимателя с консультантом

Предприниматель: – Мне вновь нужна Ваша консультация. На этот раз я хочу вложить средства в создание производственной фирмы, которая будет производить изделия по заказам потребителей. Количество заказов, конечно, заранее неизвестно. Можно только предположительно указать среднее число заказов в единицу времени (например, в день).

Консультант: – В таком случае следует принять допущение с том, что поток отказов является простейшим, а это означает, что время между соседними заказами представляет собой случайную величину с показательным распределением.

Предприниматель: – Я предполагаю, что в технологическом процессе производства будет участвовать несколько цехов. Каждый из них будет выполнять определенную часть операций по изготовлению изделия, а из последнего цеха будет выпускаться готовое изделие. Сколько будет цехов и какую часть времени изделия будут находиться в каждом из них, я пока не знаю. Желательно, чтобы структура предприятия была оптимальной.

Консультант: – В каком смысле "оптимальной"?

Предприниматель: – В смысле обеспечения наибольшей прибыли. Пока я могу лишь указать среднее время на изготовление одного изделия. Оно складывается из средних времен работы с изделием в различных цехах. Можно также ориентировочно указать величину максимального разброса времени изготовления изделия в процентах от его среднего значения.

Консультант: – В этих условиях целесообразно принять допущение о том, что время изготовления изделия в каждом цехе является случайной величиной с нормальным распределением. Среднее время работы с изделием для каждого цеха должно быть задано. Разброс времени изготовления изделий можно характеризовать относительным значением среднего квадратического отклонения времени работы с изделием, постоянным для всех цехов.

Предприниматель: – В качестве показателя эффективности я предполагаю использовать величину средней прибыли. Ее можно определить как произведение среднего числа изготовленных изделий на цену одного изделия за вычетом общих затрат на организацию производства.

Консультант: – Можно ориентироваться на среднюю прибыль, но предпочтительнее выбрать минимальную гарантированную прибыль с

заданным уровнем гарантии, которая учитывает разброс возможных величин прибыли относительно ее среднего значения.

Предприниматель: – Все же наиболее неопределенной мне представляется структура будущего предприятия. Существует множество вариантов распределения ресурсов по цехам. Можно ли сформировать такой числовой параметр, который отражал бы изменения в структуре предприятия?

Консультант: – Нужно выбрать такую переменную, которая была бы чувствительна к изменению структуры производства и представляла бы собой непрерывную величину, меняющуюся в некотором диапазоне (например, в интервале (0,1)). Для этого придется сделать дополнительные допущения.

Прежде всего, будем считать суммарное среднее время работы всех цехов по изготовлению одного изделия величиной постоянной и заданной. Для каждого варианта структуры предприятия будем считать, что средние времена работы в цехах образуют убывающий ряд чисел. Тогда среднее время работы в первом цехе будет максимальным, а в последнем цехе – минимальным. Если разделить разность между максимальным и минимальным временем на общее среднее время работы с изделием, то получим безразмерный параметр, принимающий значения в интервале (0,1). Этот параметр можно назвать числовым фактором.

Предприниматель: – А что физически означает равенство числового фактора нулю?

Консультант: – Это означает, что время работы с изделием во всех цехах одинаково. Это реализация конвейерного способа производства.

Предприниматель: – А что означает равенство числового фактора единице?

Консультант: – Это означает, что среднее время работы в первом цехе (максимальное среднее время работы) численно равно общему среднему времени работы предприятия по изготовлению одного изделия. Это случай, когда весь производственный процесс сосредоточен в одном цехе.

Все остальные возможные варианты являются промежуточными, им соответствуют значения числового фактора *Fact,* удовлетворяющие неравенству: $0 < Fact < 1$.

Предприниматель: – Так сколько же входных переменных будет иметь модель производственной фирмы?

Консультант: – Это будет зависеть от числа цехов. Если ограничить число цехов четырьмя, то можно насчитать 7 входных переменных:

- интенсивность потока отказов;
- среднее время работы с изделием в каждом цехе (для четырех цехов);

- относительная величина среднего квадратического отклонения времени работы с изделием в любом цехе;
- цена одного изделия;
- общая стоимость затрат на организацию производства;
- продолжительность периода функционирования производственной фирмы;
- число случайных реализаций моделируемого процесса.

Предприниматель: – А где же числовой фактор?

Консультант: – Он не является независимой входной переменной. Числовой фактор определяется после выбора значений среднего времени работы с изделием в каждом цехе. Он является в модели выходной переменной наряду со средним числом изготовленных изделий, средней прибылью и средним квадратическим отклонением прибыли.

Предприниматель: – Ну, а к какому классу можно отнести создаваемую модель?

Консультант: – Это алгоритмическая модель одноканальной многофазной системы массового обслуживания с однородными заявками и неограниченным ожиданием.

2. Концептуальная модель

Имеется производственная фирма, которая осуществляет выпуск сложных изделий по заказам потребителей. Технологический процесс предусматривает изготовление отдельных узлов и агрегатов с помощью различного оборудования, которое может размещаться в нескольких цехах. Количество цехов $N_Ц$ – величина переменная, изменяющаяся от 1 до 4.

Поток заказов – простейший (пуассоновский) с известным средним числом заказов в день – L_Z.

Случайная величина времени изготовления одного изделия складывается из случайных величин времени изготовления агрегатов в каждом цехе, имеющих нормальное распределение. Среднее значение времени работы (времени "обслуживания" изделия) в j-м цехе $T_{ОБ.j}$ для каждого варианта структуры предприятия считается заданным. Суммарное среднее время изготовления изделия T_s является постоянным. Разброс времени работы в каждом цехе характеризуется относительным средним квадратическим отклонением $\sigma_{ОБ}^{ОТН}$, постоянным для всех цехов.

На выпуск продукции оказывает влияние структура предприятия, т.е. количество цехов и распределение ресурсов по цехам. Число возможных вариантов структуры бесконечно. Поэтому для исследования влияния структуры фирмы на эффективность производственного процесса необходимо выбрать параметр или числовой фактор, который свел бы количество расчетных вариантов к обозримому числу.

В качестве такого числового фактора предлагается ввести следующее выражение:

$$Fact = \{MAX(T_{ОБ.j}) - MIN(T_{ОБ.j})\} / T_s \quad (j=1, 2, 3, 4),$$

где $MAX(T_{ОБ.j})$ – максимальное среднее время работы для различных цехов; $MIN(T_{ОБ.j})$ – минимальное среднее время работы для различных цехов; T_S – суммарное среднее время изготовления изделия.

Чистая прибыль, получаемая в результате изготовления одного изделия, равна *$P*. Дополнительные затраты фирмы на обеспечение производства за период T_D дней равны $C. Поэтому случайная прибыль определяется по формуле

$$\Pr of = N_{ИЗД} \times P - C,$$

где $N_{ИЗД}$ – количество выпущенных изделий для одной случайной реализации моделируемого процесса.

В качестве показателя эффективности исследуемой системы принята минимальная гарантированная прибыль, определяемая по формуле

$$G_{prof} = M_{prof} - K_{\alpha} \cdot \sigma_{prof},$$

где M_{prof} – математическое ожидание прибыли;

σ_{prof} – среднее квадратическое отклонение прибыли;

K_{α} – квантиль нормального распределения, соответствующий заданному уровню надежности а (K_{α} = 1,28 при α = 0,9).

Управляющими (варьируемыми) параметрами модели являются:

1) массив среднего времени "обслуживания" изделий в цехах, используемый для расчета значения числового фактора;

2) относительная величина разброса времени работы в каждом цехе $\sigma_{ОБ}^{ОТН}$.

В качестве критерия эффективности принят ***максимум минимальной гарантированной прибыли***

$K(Fakt^*): \max\{G_{prof}(Fakt)\}$, где *Fact** – оптимальное значение числового фактора.

3. Схемы алгоритма модели

В качестве языка программирования для разработки компьютерной модели рассматриваемого процесса выбран Visual Basic 6.0.

Общий вид стартовой формы показан на рис. 1. Она включает следующие объекты управления: текстовые поля для изменения исходных данных; вывода значения числового фактора показателя эффективности, а также командные кнопки "Расчет" "Очистка" и "Выход".

Укрупненная схема алгоритма модели показана на рис. 2.

После нажатия на панели инструментов кнопки "Start" активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

Цифрой 1 обозначено действие, заключающееся в корректировке исходных данных. Необходимые изменения вносятся в соответствующие текстовые поля.

Цифрой 2 обозначено действие, заключающееся в нажатии (с помощью мыши) кнопки "Расчет". В процедуре, связанной с этой кнопкой, оператор 3 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Затем оператор 4 обращается к модулю общего назначения "Model7". После окончания работы модуля и выдачи на экран результатов моделирования работа процедуры, связанной с кнопкой "Расчет", заканчивается. Программа вновь переходит в режим ожидания действий пользователя.

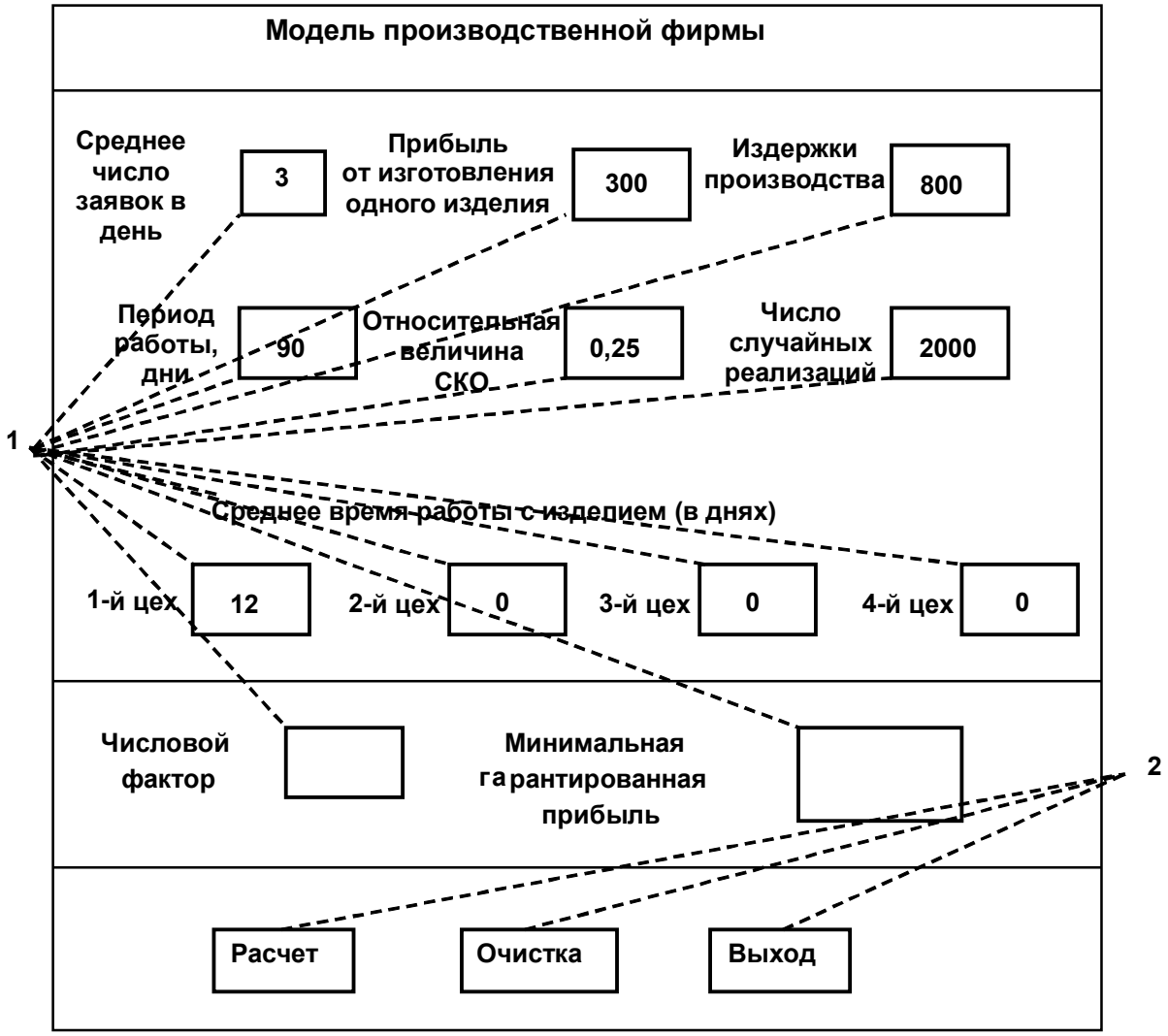


Рис. 1. Макет стартовой формы:
1 — текстовые поля; 2 — командные кнопки

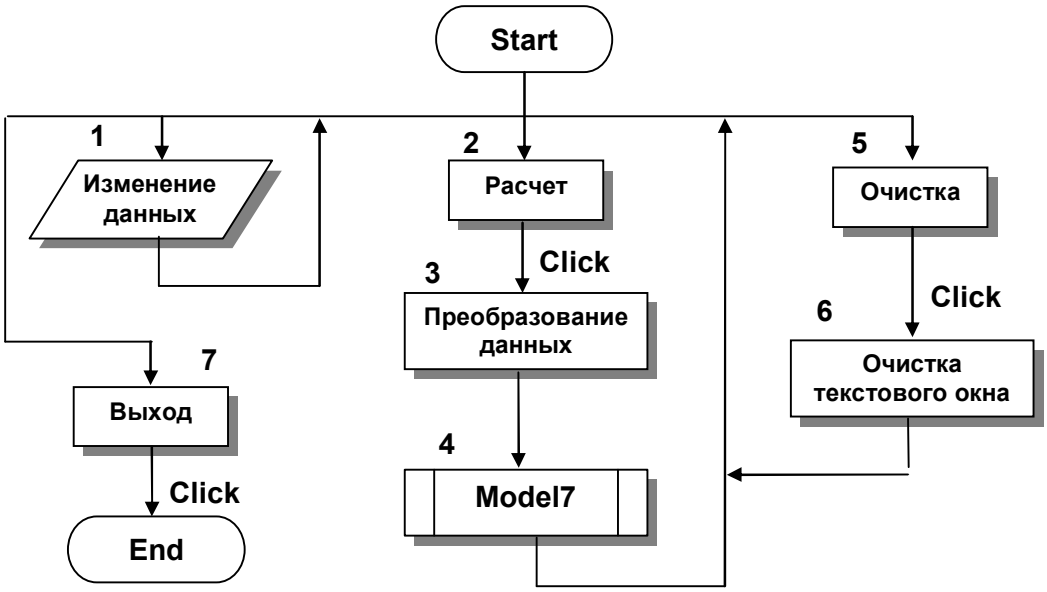


Рис. 2. Схема алгоритма процедур обработки данных

Цифрой 5 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Очистка". В процедуре, связанной с ней, производится очищение текстовых полей для вывода показателя эффективности и значения числового фактора. Затем может быть произведено изменение исходных данных и проведены новые расчеты с использованием кнопки "Расчет".

Цифрой 7 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Выход". В результате работа программы прекращается.

В состав базового комплекта исходных данных входят:

L_Z – среднее число заказов в день;

$T_{ОБС.j}$; ($j= 1, 2, 3, 4$) – среднее время работы с изделием в j-м цехе для выбранного варианта структуры предприятия (в днях);

P – прибыль от изготовления одного изделия ($);

C – издержки производства за период функционирования фирмы ($);

T_D – период функционирования фирмы (в днях);

$\sigma_{ОБ}^{ОТН}$ – относительная величина разброса времени работы в каждом цехе;

N_P – число случайных реализаций моделируемого процесса.

Схема алгоритма модуля "Model7" показана на рис. 3.

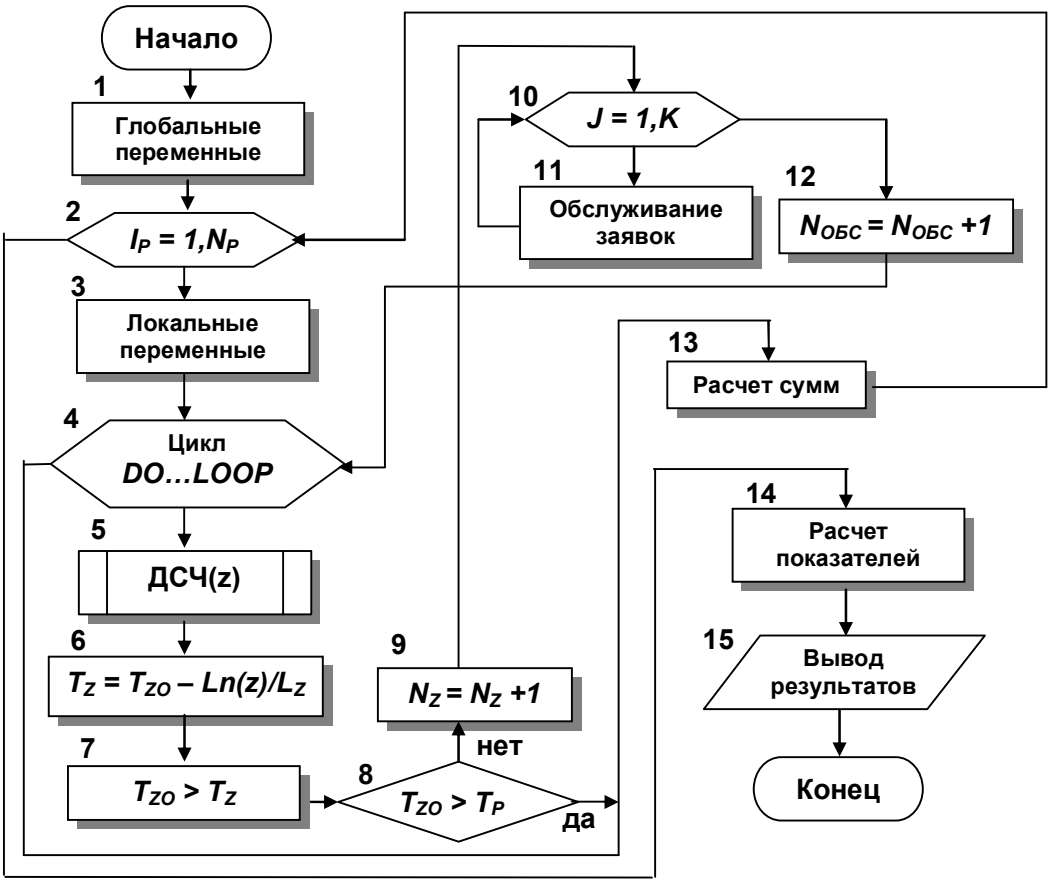


Рис. 3. Схема алгоритма модуля "Model7"

Оператор 1 служит для обнуления глобальных переменных, к которым относятся:

M_{prof} – суммарная величина прибыли для всех случайных реализаций;

Sum2 – сумма квадратов прибыли для всех случайных реализаций.

Оператор 2 является началом цикла случайных реализаций.

Оператор 3 служит для обнуления локальных переменных, к числу которых относятся:

N_Z - число заказов для текущей реализации;

$N_{ОБС}$ - число выполненных заказов для текущей реализации;

T_{kj} – $(j = 1, 2, 3, 4)$ – время окончания работы с очередным изделием в j-м цехе;

T_{ZO} – время поступления предыдущего заказа.

Оператор 4 является началом циклического перебора поступающих заказов. Оператор 5 обращается к датчику случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1). Оператор 6 служит для определения возможного значения случайной величины времени поступления заказа при условии, что время между соседними заказами имеет показательное распределение. Оператор 7 фиксирует новое значение переменной T_{ZO}.

Условный оператор 8 проверяет условие продолжения периода функционирования производственной фирмы. Если это условие выполняется, оператор 9 увеличивает на единицу счетчик числа поступивших заказов. В противном случае расчет данной случайной реализации заканчивается, и управление передается оператору 13.

Операторы 10 и 11 описывают циклический процесс работы цехов предприятия по обслуживанию очередной заявки.

После того как изделие покинет последний цех, оператор 12 подсчитывает число изготовленных изделий. После окончания периода функционирования предприятия оператор 13 производит расчеты по формулам:

$$\Pr of = N_{ОБС} \cdot P - C\$$$

$$M_{prof} = M_{prof} + \Pr of\$$$

$$Sum2 = Sum2 + \Pr of \times \Pr of.$$

После окончания цикла случайных реализаций оператор 14 производит расчеты показателя эффективности по формулам:

$$C_{prof} = M_{prof} / N_P;$$

$$\sigma_{prof} = \sqrt{\frac{1}{N_P - 1}(Sum2 - N_P \cdot C_{prof}^2)};$$

$$C_{prof} = C_{prof} - 1{,}28 \cdot \sigma_{prof}.$$

Процесс, происходящий в каждом из цехов (блок 11 на рис. 3), подробно рассматривается на схеме блока обслуживания заявки (рис. 4).

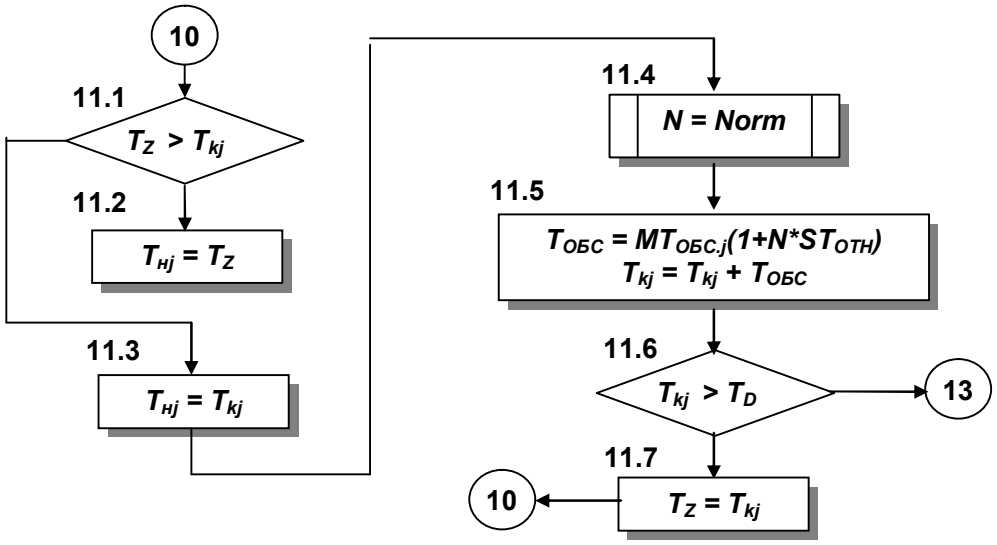


Рис. 4. Схема алгоритма блока обслуживания заявок

Оператор 11.1 проверяет, свободно ли оборудование *j*-го цеха для начала работы над очередным заказом. Если время получения заказа цехом превышает время окончания работ над предыдущим заказом, то в операторе 11.2 время начала работы T_{Hj} приравнивается времени

поступления заказа T_Z. В противном случае в операторе 11.3 оно приравнивается времени освобождения оборудования цеха от работы над предыдущим заказом T_{kj}.

Оператор 11.4 обращается к процедуре "Norm" – датчику случайных чисел с нормальным распределением, а оператор 11.5 определяет возможное значение случайной величины времени работы с изделием в *j*-м цехе.

Оператор 11.6 проверяет условие окончания процесса функционирования предприятия. Оператор 11.7 присваивает времени поступления заказа в следующий цех значение времени окончания работ в предыдущем цехе. С этого момента начинается имитация процесса работы с изделием в следующем цехе.

Отметим, что в отличие от других алгоритмов моделей (например, бензоколонки) в алгоритме модели производственной фирмы формируется не поток заявок, а очередная одиночная заявка (заказ), после чего сразу рассматривается процесс ее обслуживания способом последовательной проводки.

4. Пример решения задачи моделирования

Примем следующие исходные данные:

- среднее число заказов в день L_Z =3;
- прибыль от изготовления одного изделия P = 300 $;
- издержки производства за период функционирования фирмы C = 800 $;
- период функционирования фирмы T_D = 90 дней;
- число случайных реализаций моделируемого процесса N_p = 2000;
- относительная величина разброса времени работы в каждом цехе:

$$\sigma_{ОБ}^{ОТН} = 0{,}25;\ 0{,}50;\ 1{,}00;$$

- среднее время работы с изделием в *j*-м цехе для выбранного варианта структуры предприятия (в днях) $T_{ОБ.j}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Рассматриваемые варианты структуры предприятия приведены в табл. 1.

Вариант №1 предполагает, что работа по изготовлению изделий производится только в одном цехе. При этом значение числового фактора равно единице.

Таблица 1

Варианты структуры производственной фирмы

Номер варианта	Количество цехов	Среднее время работы по цехам, дней				Суммарное среднее время, дней	Числовой фактор *Fact*
		1-й цех	2-й цех	3-й цех	4-й цех		
1	1	12	0	0	0	1	1,000
2	3	8	3	1	0	12	0,667
3	4	6	4	1,5	0,5	12	0,458
4	4	4,8	3,6	2,4	1,2	12	0,300
5	4	4	3,5	2,5	2	12	0,167
6	4	3	3	3	3	12	0,000

В варианте №2 используются три цеха. Среднее время выполнения операций по изготовлению изделия в цехах распределено неравномерно и при этом числовой фактор имеет значение 0,667.

Для вариантов №3, 4, 5 и 6 используются четыре цеха. Распределение времени работы указано в табл. 1. Для последнего варианта время распределено равномерно, и при этом числовой фактор принимает нулевое значение. Результаты моделирования представлены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты решения задачи моделирования

Номер варианта	$\sigma_{ОБ}^{ОТН}$	Среднее время работы, дней				Числовой фактор	C_{prof} \$
		1-й цех	2-й цех	3-й цех	4-й цех		
1	0,25	12	0	0	0	1,000	1021
2	0,25	8	3	1	0	0,667	1918
3	0,25	6	4	1,5	0,5	0,458	2871
4	0,25	4,8	3,6	2,4	1,2	0,300	3784
5	0,25	4	3,5	2,5	2	0,167	4589
6	0,25	3	3	3	3	0,000	6001
9	0,50	12	0	0	0	1,000	745
8	0,50	8	3	1	0	0,667	1676
9	0,50	6	4	1,5	0,5	0,458	2441
10	0,50	4,8	3,6	2,4	1,2	0,300	3399
11	0,50	4	3,5	2,5	2	0,167	4131
12	0,50	3	3	3	3	0,000	4954
13	1,00	12	0	0	0	1,000	308
14	1,00	8	3	1	0	0,667	1035
15	1,00	6	4	1,5	0,5	0,458	1768
16	1,00	4,8	3,6	2,4	1,2	0,300	2436
17	1,00	4	3,5	2,5	2	0,167	2980
18	1,00	3	3	3	3	0,000	3487

Анализ данных, приведенных в табл. 2, показывает, что наибольшая прибыль достигается в том случае, когда производственная фирма имеет четыре цеха, а среднее время работы с i изделием одинаково для всех цехов. В этом случае производственная линия переходит к выполнению очередного заказа сразу после того, как закончатся работы с изделием в первом цехе, т.е. в среднем через каждые 3 дня.

Наименьшая прибыль будет получена тогда, когда все производственные мощности цеха сосредоточены в одном цехе. В этом случае очередной заказ может быть принят только после того, как будет полностью изготовлено предыдущее изделие, т.е. в среднем через 12 дней.

Приложение Б

Программа модели производственной фирмы на языке Visual Basic 6.0

1. Стартовая форма frmForml

Макет стартовой формы приведен на рис. 1.

1.1. Таблица свойств

Объекты	Свойства	Установки
Командная кнопка 1	Name Caption	Command 1 Расчет
Командная кнопка 2	Name Caption	Command 2 Очистка
Командная кнопка 3	Name Caption	Command 1 выход

1.2. Процедуры обработки объектов

```
Private Sub Commandl_Click()
Lz = Val(Textl): P = Val(Text2): C = Val(Text3)
    TD = Val(Text4): STotn = Val(Text5): Nr = W(Text6)
    Forj = 1 To 4: MTobsG) = Val(Text7(j - 1)): Nextj
      Call Model4
End Sub
Private Sub Command2_Click()
   Text8 = "": Text9 = ""
End Sub
Private Sub Command3_Click()
   End
        End Sub
```

2. Модуль общего назначения ModeI7.bas

```
Public MTobs(4), TH(4), TK(4)
Public Mprof As Double, Cprof As Double, Sum2 As Double
        Public SNM As Double, SigProf As Double
Public Lz, P, C, TD, STotn, Nr
Public Ir, Nz, TzO, Nobs, i, j, z, Tz, N, Tobs, Sz, Min
Public Max, SMT, Fact
Const К = 4                                          ' число цехов
Public Sub Model7()
        Randomize
                        'обнуление глобальных переменных:
Mprof = 0                          ' начальное значение средней прибыли
Sum2 = 0                   ' начальное значение суммы квадратов прибыли
For Ir = 1 To Nr                        'начало цикла случайных реализаций
```

```
                    ' обнуление локальных переменных
        Nz = 0: TzO = 0: Nobs = 0
        For j = 1 To K: TKG) = 0: Nextj
 Do                                  ' начало внутреннего цикла DO..LOOP
  z= Rnd                             ' случайная величина с равномерным
                                                          'распределением
  Tz = TzO - Log(z) / Lz             ' время поступления заказа
  TzO = Tz
  If Tz > TD Then Exit Do
  Nz = Nz + 1                        ' счетчик числа заказов
          Forj = 1 To К              ' начало цикла выполнения заказов
If Tz > TKG) Then TH(j)=Tz Else THG)=TK(j)
N = NORM                             ' функция "Нормальное распределение"
Tobs = MTobsG) * (1 + N * STotn)
TK(j) = TH(j) + Tobs                 ' время окончания обслуживания
      If TKG) > TD Then Exit Do
      Tz = TKG)
            Next j
          Nobs = Nobs + 1
 Loop
                    'результаты расчета одной реализации:
Prof = P * Nobs – C                                          ' прибыль
Mprof = Mprof + Prof                                 ' суммарная прибыль
Sum2 = Sum2 + Prof * Prof                      ' сумма квадратов прибыли
Next Ir                                  ' конец цикла случайных реализаций
Cprof = Mprof / Nr                                     ' средняя прибыль
Disp = (Sum2 - Nr * Cprof * Cprof) / (Nr - 1)      ' дисперсия прибыли
If Disp > 0 Then SigProf = Sqr(Disp) Else SigProf = 0
Gprof = Cprof - 1.28 * SigProf                ' минимальная гарантированная
                                                          'прибыль
Call Factor                          ' расчет величины числового фактора
    Forml.Text8 = Format$(Fact, "0.000")
    Forml.Text9 = Format$(Gprof, "#####")
End Sub
Function NORM()
                'процедура-функция "Нормальное распределение"
Sz = 0
For i = 1 To 12
   z = Rnd: Sz = Sz + z
    Nexti
   NORM = Sz - 6
End Function
Public Sub Factor()
```

```
                    'процедура расчета числового фактора
Min = MTobs(l): Max = MTobs(l): SMT = 0
For f=l ToK
SMT = SMT + MTobs(f)
If MTobs(f) > Max Then Max = MTobs(f)
        If MTobs(f) < Min Then Min = MTobs(f)
   Next
   Fact = (Max - Min) / SMT
End Sub
```

Задание 11. Особенности и методы создания модели торговой точки

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с современными подходами и методами создания и использования модели торговой точки.

В задании приводятся результаты разработки модели торговой точки (Приложение А) с использованием исходных данных, формируемым в результате предварительных исследований, представленных в форме беседы предпринимателя с консультантом (разработчиком). Такая форма представления материала предполагает более доходчивое понимание студентами самой сути и содержания основных этапов построения модели, включая рассмотрение всех основных этапов, и ее использования для последующего анализа. В Приложении А приводится также пример решения поставленной задачи моделирования. Приведенный материал Приложения А дает возможность самостоятельного выполнения сформулированных в части 3 заданий.

Необходимым условием успешного выполнения задания являются базовые знания использования языка **Visual Basic 6.0**. В качестве источников информации могут служить специализированная литература и рекомендованные ниже источники.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с разработанной программой. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению полученных результатов.

3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.1

В среде Visual Basic 6.0 создайте исполняемый модуль программы "Модель торговой точки", текст которой приведен в Приложении Б. Проведите отладку программы с целью ликвидации формальных ошибок.

Задание 3.2

Проведите проверку программы расчетом. Подставьте те исходные данные, которые были выбраны в приведенном ниже примере. Убедитесь в том, что результаты расчетов практически совпадают.

Задание 3.3

Проведите самостоятельное исследование закономерностей функционирования фирмы с помощью имитационной модели. Выберите исходные данные, проведите расчеты и проанализируйте результаты моделирования

4. Рекомендуемые дополнительные источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]. Специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем [Текст]: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2000.

4. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

5. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

6. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.

7. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст] / В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.

8. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

9. Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

Приложения к заданию 11

Приложение А

Модель торговой точки

1. Разговор предпринимателя с консультантом

Предприниматель: – Мне снова нужна Ваша помощь. Я собираюсь вложить средства в создание подвижной торговой точки Она будет торговать несколькими видами товаров (например, тремя). Торговля может производиться в одной из трех точек (пунктов), в каждой из которых назначаются свои цены на товары. Кроме того, каждый из трех пунктов торговли имеет свои дополнительные особенности, которые заключаются в том, что в некоторых заранее не предсказуемых случаях фирме придется нести внеплановые убытки, связанные с действиями рэкетиров. Это создает неопределенность при планировании ожидаемой прибыли. Разумеется, объем продаж тоже не может быть предсказан заранее.

Мне нужна математическая модель, с помощью которой можно было бы описать данную ситуацию и выработать оптимальный способ организации торговли.

Консультант: – Очевидно, и на этот раз речь идет о разработке имитационной статистической модели. Имеющиеся неопределенности могут быть разрешены путем задания распределений случайных величин, являющихся входными переменными модели. Прежде всего, целесообразно предположить, что выручка с продажи какого-либо вида товара на одном из пунктов торговли имеет усеченное нормальное распределение с заданными параметрами. Поскольку имеются три вида товара и три пункта торговли, то необходимо задать девять значений математического ожидания, девять значений среднего квадратического отклонения (СКО), девять минимальных значений и девять максимальных значений случайных величин выручки. Всего 36 входных переменных.

Предприниматель: – А как описать неопределенную ситуацию, связанную с возможностью понести внеплановые убытки?

Консультант: – Нужно ввести в число входных переменных вероятность события, которое заключается в возникновении такой ситуации на каждом пункте торговли. Сам факт причинения убытка будет разыгрываться в модели по жребию как событие с заданной вероятностью. Если событие произойдет, то нужно из общей выручки вычесть величину внепланового убытка. Если же при очередном розыгрыше событие не произойдет, то убытка не будет.

Предприниматель: – А как определить величину убытка?

Консультант: – Здесь целесообразно также принять усеченное нормальное распределение, но с другими параметрами. Для трех торговых точек это составит вместе с вероятностями 15 входных переменных. К ним

еще нужно добавить число случайных реализаций моделируемого процесса. Получится всего 52 входные переменные.

Предприниматель: – Многовато. Нельзя ли сократить число переменных?

Консультант: – Конечно, можно. Но для этого придется принять ряд дополнительных допущений. Прежде всего, можно сократить число переменных, характеризующих разброс случайных величин выручки за проданный товар. Допустим, что среднее квадратическое отклонение дневной выручки для всех пунктов и всех видов товара составляет одну и ту же долю от соответствующей средней величины дневной выручки.

Допустим также, что минимальная дневная выручка для всех пунктов торговли и всех видов товаров равна отклонению от среднего значения выручки на одинаковое количество средних квадратических отклонений в сторону уменьшения величины выручки.

Допустим еще, что максимальная дневная выручка для всех пунктов торговли и всех видов товаров равна отклонению от среднего значения выручки на одинаковое количество средних квадратических отклонений в сторону увеличения величины выручки.

Далее допустим, что среднее квадратическое отклонение внепланового убытка для всех пунктов торговли составляет одну и ту же долю от соответствующей средней величины внепланового убытка.

Допустим еще, что минимальный внеплановый убыток для всех пунктов торговли равен отклонению от среднего значения убытка на одинаковое количество средних квадратических отклонений в сторону уменьшения величины убытка.

Наконец, допустим, что максимальный внеплановый убыток для всех пунктов торговли равен отклонению от среднего значения убытка на определенное количество средних квадратических отклонений в сторону увеличения величины убытка.

Осталось принять еще одно общее допущение о том, что относительные характеристики распределений всех случайных величин одинаковы для всех торговых точек и всех видов товара, в итоге число входных переменных сократится до 19.

Предприниматель: – Осталось выбрать показатель эффективности. Наверное, это должна быть минимальная гарантированная выручка для каждой торговой точки. А что принять в качестве критерия эффективности?

Консультант: – Можно выбрать торговую точку, для которой величина показателя эффективности – средней прибыли – будет максимальной. Можно также использовать разработанную имитационную модель для решения задачи в такой постановке: при различных величинах вероятностей внеплановых убытков определить максимально допустимые

величины средних убытков, при которых условия торговли на всех пунктах становятся практически одинаковыми.

2. Концептуальная модель

Имеется подвижная торговая точка, которая проводит торговлю в трех различных пунктах. Торговая точка реализует три вида товаров. Выручка, полученная от продажи каждого вида товара, является случайной величиной с усеченным нормальным распределением. Предполагается также, что на каждом пункте с некоторой заданной вероятностью торговой точке будет причинен внеплановый убыток (например, продавцу придется уплатить "дань" рэкетирам). Размер этого убытка можно считать случайной величиной, имеющей усеченное нормальное распределение с заданными параметрами.

Для каждого пункта торговли задан комплект входных параметров:

1) $T_{ср.ij}$ - среднее значение дневной выручки от продажи j-го товара на i-м пункте *(i = 1, 2, 3* и *j = 1, 2, 3)*;

2) P_i - вероятность того, что на данном пункте торговой точке будет причинен внеплановый убыток;

3) U_i - средняя величина внепланового убытка.

Кроме того, в число входных параметров входят:

4) $\sigma_T^{ОТН}$ – относительная величина среднего квадратического отклонения дневной выручки, одинаковая для всех пунктов торговли и всех видов товара и используемая для определения возможного значения случайной выручки T_{ij} по формуле

$$T_{ij} = T_{ср.ij}(1 + \sigma_T^{отн}\eta) \quad i = 1,2,3; \; j = 1,2,3),$$

где η – возможное значение случайной величины с усеченным нормальным распределением;

5) $\sigma_U^{ОТН}$ – относительная величина среднего квадратического отклонения внепланового убытка, одинаковая для всех пунктов торговли и используемая для определения возможного значения случайного убытка U_i по формуле

$$U_i = U_{ср.ij}(1 + \sigma_U^{отн}) \qquad (i = 1,2,3; \; j = 1,2,3);$$

6) T_{min} – заданное минимальное значение случайной величины для эталонного усеченного нормального распределения (используемое при генерировании величины *η);*

7) T_{max} - заданное максимальное значение случайной величины для эталонного усеченного нормального распределения (используемое при генерировании величины *η).*

Величины T_{min} и T_{max} используются в процедуре, вырабатывающей возможные значения случайной величины, имеющей усеченное нормальное распределение.

Примем дополнительное допущение:

$$\sigma_T^{отн} = \sigma_U^{отн} = \sigma^{отн}.$$

Суммарная выручка от продажи всех видов товара с учетом убытка составляет случайную прибыль. В качестве показателя эффективности работы торговой точки примем минимальную гарантированную прибыль, определяемую по следующей зависимости:

$$Gar_{ПР.i} = M_{ПР.i} - K_a \cdot \sigma_{ПР.i},$$

где $M_{ПР.i}$ – математическое ожидание (среднее значение) прибыли для i-го пункта торговли; $\sigma_{ПР.i}$ - среднее квадратическое отклонение прибыли для i-го пункта торговли;

K_α – квантиль нормального распределения, соответствующий заданной надежности а (K_α = 1,28 при α = 0,9).

Примечание. *Предполагается, что случайная величина прибыли имеет нормальное распределение.*

Задача исследования может заключаться в определении условий, при которых все пункты торговли будут равноценными по величине приносимой прибыли. В этих условиях необходимо установить, какова функциональная связь между увеличением среднего убытка и компенсирующим его уменьшением вероятности причинения убытка.

3. Алгоритм модели

В качестве языка программирования для разработки компьютерной модели рассматриваемого процесса выбран Visual Basic 6.0. Общий вид стартовой формы показан на рис. 1.

Модель торговой точки

Измените исходные данные и нажмите кнопку "Расчет"

№	Средняя выручка			Средний убыток	Вероятность убытка
	Товар 1	Товар 1	Товар 1		
1	3000	3000	3000	3000	0.1
2	3000	3000	3000	3000	0.5
3	3000	3000	3000	3000	0.9

Относительное СКО выручки	Минимальная относительная выручка	Максимальная относительная выручка	Число случайных реализаций
0,25	-1	2	5000

Гарантийная минимальная прибыль	1-я точка	2-я точка	3-я точка

Расчет Очистка Выход

Рис. 1. Макет стартовой формы

В нее включены следующие объекты управления:

1) девятнадцать текстовых полей для изменения исходных данных;

2) три текстовых поля для вывода значений минимальной гарантированной прибыли;

3) командная кнопка "Расчет" для запуска расчетного модуля;

4) командная кнопка "Очистка" для очистки полей результатов расчета;

5) командная кнопка "Выход" для окончания работы программы.

Схема процедур обработки прерываний показана на рис. 2.

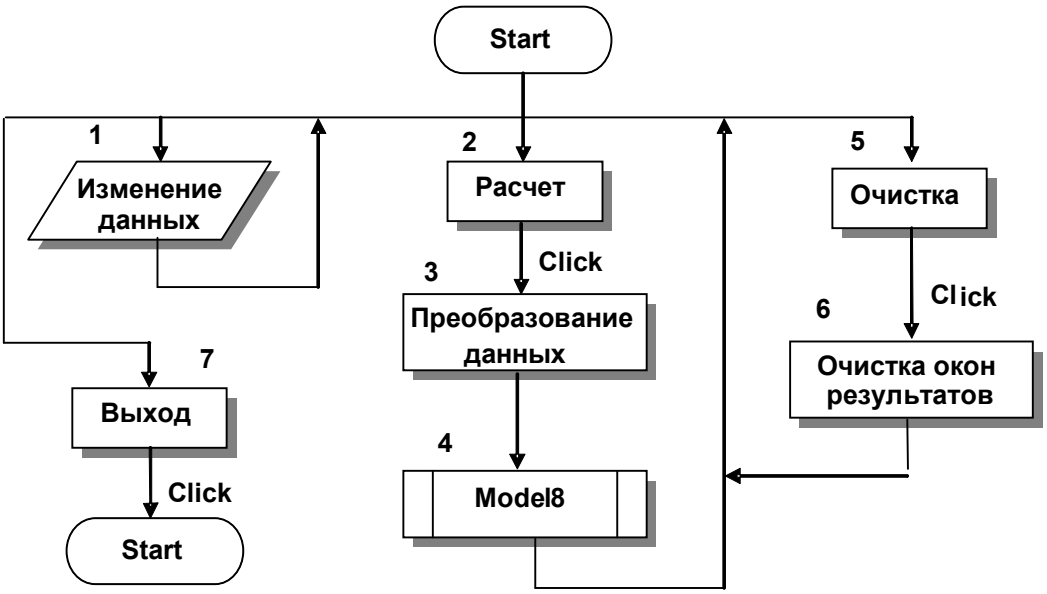


Рис. 2. Схема алгоритма процедур обработки объектов

После нажатия кнопки "Start" активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

Цифрой 1 обозначено действие, заключающееся в корректировке исходных данных. Необходимые изменения вносятся в соответствующие текстовые поля.

Цифрой 2 обозначено действие, заключающееся в нажатии (с помощью мыши) кнопки "Расчет". В процедуре, связанной с этой кнопкой, оператор 3 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Затем оператор 4 обращается к модулю общего назначения "Model8". После окончания работы модуля и выдачи на экран результатов моделирования работа процедуры, связанной с кнопкой "Расчет", заканчивается. Программа вновь переходит в режим ожидания действий пользователя

Цифрой 5 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Очистка". В процедуре, связанной с ней, производится очищение текстовых полей для вывода показателя

эффективности и значения числового фактора. Затем может быть произведено изменение исходных данных и проведены новые расчеты с использованием кнопки "Расчет".

Цифрой 7 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Выход". В результате работа программы прекращается.

Схема алгоритма модуля "Model8" показана на рис. 3.

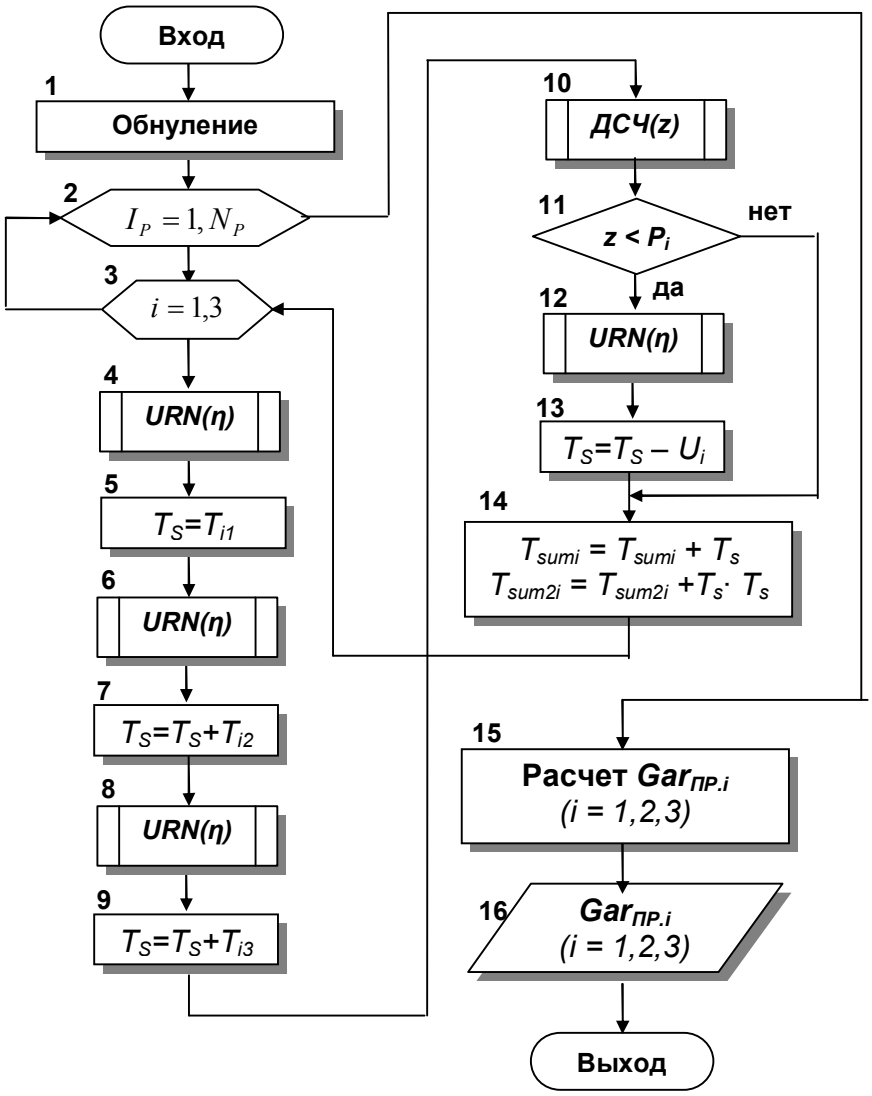


Рис. 3. Схема алгоритма модуля "Model8"

Оператор 1 обнуляет глобальные переменные:

- суммарную прибыль для каждого пункта торговли для всех случайных реализаций моделируемого процесса T_{sumi} *(i= 1, 2, 3)*;
- сумму квадратов прибыли для каждого пункта торговли всех случайных реализаций моделируемого процесса T_{sum2i} (i=1,2,3).

Оператор 2 является началом циклического перебора случайных реализаций, а оператор 3 осуществляет циклический перебор пунктов торговли.

Оператор 4 обращается к процедуре, вырабатывающей возможные значения случайной величины η с усеченным нормальным распределением при заданных нормированных параметрах T_{min} и $T_{max.}$

Оператор 5 определяет возможное значение выручки для 1-го пункта торговли от продажи 1-го вида товара и помещает результат в сумматор:

$$T_S = T_{i1} = T_{CP.i1}(1 + \eta \cdot \sigma^{OTH}),$$

где η – возможное значение случайной величины с усеченным нормальным распределением.

Операторы 6 и 7 определяют случайное приращение выручки для 1-го пункта торговли от продажи 2-го вида товара и помещают результат в сумматор:

$$T_S = T_S + T_{i2} = T_S + T_{CP.i2}(1 + \eta \cdot \sigma^{OTH}).$$

Аналогичным образом операторы 8 и 9 определяют случайное приращение выручки для 1-го пункта торговли от продажи 3-го вида товара и помещают результат в сумматор:

$$T_S = T_S + T_{i3} = T_S + T_{CP.i3}(1 + \eta \cdot \sigma^{OTH}).$$

Операторы 10 и 11 моделируют появление случайного события с заданной вероятностью. Оператор 10 с помощью датчика случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1) вырабатывает возможное значение этой величины z. Если в операторе 11 выполняется условие $z < P_i$ то считается, что в дауном пункте торговли имели место внеплановые убытки.

Операторы 12 и 13 определяют возможное значение внепланового убытка, который вычитается из накопленной суммарной выручки:

$$T_S = T_S - U_i = T_S + U_{CP.i}(1 + \eta \cdot \sigma^{OTH}).$$

В операторе 14 определяются:

• суммарная величина прибыли для всех случайных реализаций моделируемого процесса, определяемая по рекурсивной формуле

$$T_{sum.i} = T_{sum.i} + T_S;$$

• сумма квадратов величин прибыли для всех случайных реализаций моделируемого процесса, определяемая по рекурсивной формуле

$$T_{sum.2i} = T_{sum.2i} + T_S \cdot T_S.$$

После этого управление в алгоритме передается оператору 3 для моделирования процесса продажи товаров на 2-м, а затем и на 3-м пунктах торговли.

Оператор 15 служит для расчета показателя эффективности моделируемого процесса по следующим зависимостям:

$$M_{ПР.i} = \frac{1}{N_P} \cdot T_{sum.i};$$

$$\sigma_{ПР.i} = \sqrt{\frac{1}{N_P - 1}(T_{sum.2i} - N_P \cdot M^2_{ПР.i}};$$

$$Gar_{ПР.i} = M_{ПР.i} - K_{\alpha} \cdot \sigma_{ПР.i},$$

где $M_{ПР.i}$ – математическое ожидание (среднее значение) прибыли для i-го пункта торговли; $\sigma_{ПР.i}$ – среднее квадратическое отклонение прибыли для i-го пункта торговли; $Gar_{ПР.i}$ – минимальная гарантированная прибыль с уровнем гарантии α (при α = 0,95 квантиль нормального распределения K_{α} = 1,645).

Оператор 16 выводит на экран значения показателей эффективности для всех трех пунктов торговли.

4. Пример решения задачи моделирования

Примем следующие исходные данные:

• средняя выручка от продажи товара 1-го вида на 1-м пункте торговли $T_{ср \cdot 11}$ = 3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 2-го вида на 1-м пункте торговли $T_{ср \cdot 12}$ = 3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 3-го вида на 1-м пункте торговли $T_{ср \cdot 13}$ =3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 1-го вида на 2-м пункте торговли $T_{ср \cdot 21}$=3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 2-го вида на 2-м пункте торговли $T_{ср \cdot 22}$=3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 3-го вида на 2-м пункте торговли T_{23}=3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 1-го вида на 3-м пункте торговли $T_{ср31}$=3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 2-го вида на 3-м пункте торговли $T_{ср \cdot 32}$ =3000 руб.;

• средняя выручка от продажи товара 3-го вида на 3-м пункте торговли $T_{ср \cdot 33}$=3000 руб.;

• средние внеплановые убытки на 1-м пункте торговли $U_{ср \cdot 1}$ = 3000 руб.;

• средние внеплановые убытки на 2-м пункте торговли $U_{ср \cdot 2}$=3000руб.;

• средние внеплановые убытки на 3-м пункте торговли $U_{ср \cdot 3}$ = 3000 руб.;

• вероятность того, что на 1-м пункте торговли будут внеплановые убытки P_1 = 0,1;

• вероятность того, что на 2-м пункте торговли будут внеплановые убытки P_2 = 0,5;

• вероятность того, что на 3-м пункте торговли будут внеплановые убытки P_3 = 0,9;

• нормированное среднее квадратическое отклонение случайных величин дневной выручки и внепланового убытка $\sigma^{отн}$ = 0,25;

• нормированное минимальное значение случайных величин дневной выручки и внепланового убытка T_{min} = -1;

• нормированное максимальное значение случайных величин дневной выручки и внепланового убытка T_{max} = +2;

• квантиль нормального распределения K_a = 1,645 (надежность α = 0,95);

• число случайных реализаций N_p = 20000.

Требуется установить, на сколько можно допустить увеличение среднего внепланового убытка на 1-м и 2-м пунктах торговли, чтобы при фиксированных вероятностях нанесения убытков прибыль на них была бы практически такой же, как на 3-м пункте.

Таким образом, варьируемыми переменными в модели будут $\boldsymbol{U_{cp1}}$ и $\boldsymbol{U_{cp2}}$.

Расчетные данные сведены в табл. 1.

Таблица 1

Расчетные данные

Номер вари-анта	Исходные данные						Показатели		
	U_1	P1	U_2	P2	U_3	P3	Gar1	Gar2	Gar3
1	7750	0,1	3400	0,5	3000	0,9	4349	4226	4302
2	7750	0,1	3400	0,5	3000	0,9	4309	4234	4285
3	7750	0,1	3400	0,5	3000	0.9	4243	4236	4299
4	7750	0,1	3400	0,5	3000	0.9	4305	4228	4321
5	7750	0,1	3400	0.5	3000	0.9	4354	4210	4332
						Средние значения	**4312**	**4307**	**4300**

Как видно из табл. 1, при выбранном числе реализаций показатели эффективности являются случайными величинами и имеют заметный разброс.

Для повышения точности результатов было проведено 5 серий расчетов при одинаковых исходных данных. Анализируя полученные усредненные данные, приведенные в таблице, можно сделать вывод о том, что с достаточной для практики точностью одинаковые условия торговли в каждом из трех пунктов обеспечиваются при следующих значениях входных параметров (табл. 2).

Таблица 2

Результаты моделирования

Номер пункта	Вероятность внепланового убытка	Допустимый средний убыток, $	Средняя дневная прибыль, $
1	0,1	7750	4312
2	0,5	3400	4307
3	0,9	3000	4300

Приложение Б

Программа модели торговой точки на языке Visual Basic 6.0

1. Стартовая форма frmForml

Макет стартовой формы приведен на рис. 1 Приложения А.

1.1. Таблица свойств

Объекты	Свойства	Установки
Командная кнопка 1	Name Caption	Command 1 Расчет
Командная кнопка 2	Name Caption	Command2 Очистка
Командная кнопка 3	Name Caption	Command 1 Выход

1.2. Процедуры обработки объектов

```
Private Sub Commandl_Click()
T(l, 1) = Val(Textl): T(l, 2) = W(Text2): T(l, 3) = Val(Text3)
U(l) = W(Text4): P(l) = Val(Text5): T(2, 1) = Val(Text6):
T(2, 2) = Val(Text7): T(2, 3) = Val(Text8): U(2) = W(Text9)
P(2) = W(Text10): T(3, 1) = Val(Text11): T(3, 2) = Val(Text12)
T(3, 3) = Val(Text13): U(3) = Val(Text14): P(3) = W(Text15)
Sigm = \W(Text16): Tmin = Val(Text17): Tmax = Val(Text18)
Nr = Val(Text19)
Call Model5                    ' обращение к модулю общего назначения
End Sub
Private Sub Command2_Click()
Text20 = «»: Text21 = «»: Text22 = «»
End Sub
Private Sub Command3_Click()
End
End Sub
```

2. Модуль общего назначения Model8.bas

```
Public T(3, 3)              'массив значений средней выручки для различных
                                        ' товаров и различных пунктов торговли

Public U(3)                 'массив значений убытков для различных пунктов
Public P(3)     ' вероятности внеплановых убытков для различных пунктов
Public Tsum(3) As Double            ' прибыль для различных пунктов для всех
                                        ' случайных реализаций
```

```
Public Tsum2(3) As Double        'сумма квадратов прибылей для различных
                                  'пунктов для всех случайных реализаций
Public Mcp(3)                     ' средняя прибыль для различных пунктов
Public Gar(3)                     'минимальная гарантированная прибыль
                                  ' для различных пунктов
Public Sigma(3)                   ' средние квадратические отклонения прибыли
                                  ' для различных пунктов
Public i, j, Ir, Nr, Tmin, Tmax, Sigm, Eta, TS, z
Public Disp, E, k
Const R= 1.645
Public Sub Model8()
        'обнуление сумм, используемых для расчета МО и СКО:
 For i = 1 To 3: Tsum(i) = 0: Tsum2(i) = 0: Next i
                 'начало цикла случайных реализаций
 For Ir = 1 To Nr
                 'начало цикла перебора торговых точек:
For i = 1 To 3
Eta = UNR: TS = T(i, 1) * (l+Sigm*Eta)
Eta = UNR: TS = TS + T(i, 2) * (l+Sigm*Eta)
Eta = UNR: TS = TS + T(i, 3) * (l+Sigm*Eta)
     z = Rnd
If z < P(i) Then
Eta = UNR: TS = TS - U(i) * (l+Sigm*Eta)
            End If
Tsum(i) = Tsum(i) + TS
Tsum2(i) = Tsum2(i) + TS * TS
Next i                            ' конец цикла перебора торговых точек
Next Ir                           ' конец цикла случайных реализаций
        'расчет показателей (МО и СКО) для каждой точки:
 For i = 1 To 3
 Mcp(i) = Tsum(i) / Nr                    'расчет средней прибыли
                 'расчет дисперсии и СКО прибыли:
IfNr > IThen
Disp = (Tsum2(i) - Nr * Mcp(i)*Mcp(i))/(Nr - 1)
Sigma(i) = Sqr(Disp)
 Else
Sigma(i) = 0
 End If
                 ' минимальная гарантированная прибыль:
 Gar(i) = Mcp(i) - R * Sigma(i)
Nexti
```

```
                    ' вывод результатов расчета:
                    Forml.Text20.Text = Format$(Gar(l), "#####")
                    Forml.Text21.Text = Format$(Gar(2), "#####")
                    Forml.Text22.Text = Format$(Gar(3), "#####")
End Sub                                                  ' конец главной программы

        Public Function UNR()
                    ' Функция "Усеченное нормальное распределение"
         Do
        E = 0
        For к = 1 To 12
        z = Rnd: E = E + z
        Next к
        E = E - 6
        If E >= Tmin And E <= Tmax Then
        UNR = E: Exit Do
        End If
        Loop
        End Function
```

Задание 12. Особенности и методы создания финансовой модели

1. Постановка задачи

Основной целью курсовой работы является ознакомление с современными подходами и методами создания и использования финансовой модели предприятия.

В задании приводятся результаты разработки финансовой модели (Приложение А) с использованием исходных данных, формируемым в результате предварительных исследований, представленных в форме беседы предпринимателя с консультантом (разработчиком). Такая форма представления материала предполагает более доходчивое понимание студентами самой сути и содержания основных этапов построения модели, включая рассмотрение всех основных этапов, и ее использования для последующего анализа. В Приложении А приводится также пример решения поставленной задачи моделирования. Приведенный материал Приложения А дает возможность самостоятельного выполнения сформулированных в части 3 заданий.

Необходимым условием успешного выполнения задания являются базовые знания использования языка **Visual Basic 6.0**. В качестве источников информации могут служить специализированная литература и рекомендованные ниже источники.

2. Пояснительная записка к отчету по выполненной курсовой работе должна соответствовать установленным требованиям. В пояснительной записке желательно наличие фрагментов экранных заставок, позволяющих наглядно представить очередность и особенности выполнения отдельных процедур и операций при работе с разработанной программой. В заключении к проделанной работе необходимо представить основные выводы и рекомендации по применению полученных результатов.

3. Задания для самостоятельной работы

Задание 3.1

В среде Visual Basic 6.0 создайте исполняемый модуль программы "Финансовая модель Герца", текст которой приведен в Приложении Б. Проведите отладку программы с целью ликвидации формальных ошибок.

Задание 3.2

Проведите проверку программы расчетом. Подставьте те же исходные данные, которые были выбраны в приведенном ниже примере. Убедитесь в том, что результаты расчетов практически совпадают.

Задание 3.3

Проведите самостоятельное исследование закономерностей функционирования фирмы с помощью имитационной модели. Выберите исходные данные, проведите расчеты и проанализируйте результаты моделирования

4. Рекомендуемые дополнительные источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский / под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.
2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]. Специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.
3. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем [Текст]: практикум. – М.: Финансы и статистика, 2000.
4. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.
5. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.
6. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.
7. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст] / В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.
8. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.
9. Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

Приложения к заданию 12

Приложение А

Финансовая модель

1. Разговор предпринимателя с консультантом

Предприниматель: – Мне опять нужен Ваш совет. Я собираюсь вложить средства в строительство нового предприятия, которое будет выпускать определенную продукцию, пользующуюся спросом на рынке. Аналогичную продукцию выпускают и некоторые другие фирмы, поэтому придется действовать в условиях конкуренции.

Консультант: – Какие данные можно считать известными?

Предприниматель: – Можно приближенно оценить предполагаемые эксплуатационные расходы по выпуску продукции, т.е. можно считать известными математическое ожидание (среднее значение) расходов и среднее квадратическое отклонение этих расходов.

Консультант: – Значит, можно принять допущение о том, что расходы имеют нормальное распределение с заданными параметрами. А что известно относительно возможностей сбыта продукции, каковы характеристики рынка?

Предприниматель: – Можно предположить, что емкость рынка также имеет нормальное распределение с некоторыми известными параметрами: математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением. Хуже обстоит дело с определением характеристик той доли в рынке, которую может завоевать наше предприятие после его вступления в строй. Единственное, что можно предсказать, – это средняя величина этой доли. Вид распределения неизвестен, и нет основания для того, чтобы считать его нормальным.

Консультант: – В этом случае при создании модели исследуемого процесса можно использовать распределение произвольного типа, например, кусочно-равномерное. Можно выбрать несколько вариантов такого распределения и проанализировать реакцию модели на изменение его параметров.

Предприниматель: – Каким же показателем будет оцениваться эффективность предприятия?

Консультант: – Логично будет выбрать в качестве показателя эффективности минимальную гарантированную прибыль от продажи продукции. При этом предполагается, что случайная величина прибыли имеет нормальное распределение.

2. Концептуальная модель

Пусть намечается строительство нового предприятия при следующих условиях:

1. Выпуск продукции связан с эксплуатационными расходами, которые имеют нормальное распределение с заданными параметрами: математическим ожиданием расхода M_{rash} и средним квадратическим отклонением расхода σ_{rash}.

2. Емкость рынка, где должна реализовываться продукция предприятия, имеет нормальное распределение с заданными параметрами: математическим ожиданием емкости рынка M_{ryn}, средним квадратическим отклонением емкости рынка σ_{ryn}.

3. Доля предприятия в рынке является неопределенной и может быть задана некоторой произвольной функцией распределения (например, кусочно-равномерной функцией).

4. Случайная прибыль предприятия определяется по следующей зависимости:

$$\Pr of = Ryn \cdot Dol - Rash,$$

где Ryn – случайная величина емкости рынка; Dol – случайная величина доли предприятия на рынке; $Rash$ – случайная величина эксплуатационных расходов предприятия:

Выходными характеристиками модели являются:

• сумма случайных величин прибыли для N_p случайных реализаций

$$S_{prof} = \sum_{i=1}^{N_P} \Pr of;$$

• сумма квадратов случайных величин прибыли для N_p случайных реализаций.

$$S2_{prof} = \sum_{i=1}^{N_P} \Pr of^2.$$

Показателем эффективности работы предприятия является минимальная гарантированная прибыль, определяемая по следующим зависимостям:

$$M_{prof} = \frac{1}{N_P} S_{prof};$$

$$\sigma_{prof} = \sqrt{\frac{1}{N_P - 1}(S2_{prof} - N_P \cdot M_{prof}^2)}$$

$$Gar = M_{prof} - K_\alpha \cdot \sigma_{prof},$$

где M_{prof} – математическое ожидание (среднее значение) прибыли; σ_{prof} – среднее квадратическое значение прибыли; K_α – квантиль нормального распределения, соответствующий заданной надежности а (K_α = 1,28 при α = 0,9); G_{prof} - минимальная гарантированная прибыль.

3. Алгоритм модели

В качестве языка программирования для разработки компьютерной модели рассматриваемого процесса выбран Visual Basic 6.0. Общий вид стартовой формы показан на рис. 1.

В нее включены следующие объекты управления: несколько меток с заголовками объектов, двенадцать текстовых полей для корректировки исходных данных, три текстовых поля для вывода результатов моделирования и три командные кнопки для управления работой программы.

Схема алгоритма процедур обработки прерываний показана на рис. 2.

Финансовая модель

Измените исходные данные и нажмите «Расчет»

Параметры	Средние значения	Средние квадратические отклонения
Эксплуатационные расходы	110000	11000
Емкость рынка	2750000	250000

Число случайных реализаций	Число точек на графике
10000	

Координаты точек

№ точки	1	2	3	4	5	6
координата	0,099	0,101	0	0	0	0

Результаты моделирования

Средняя прибыль	СКО прибыли	Минимальная гарантированная прибыль

Расчет Очистка Выход

Рис. 1. Макет стартовой формы

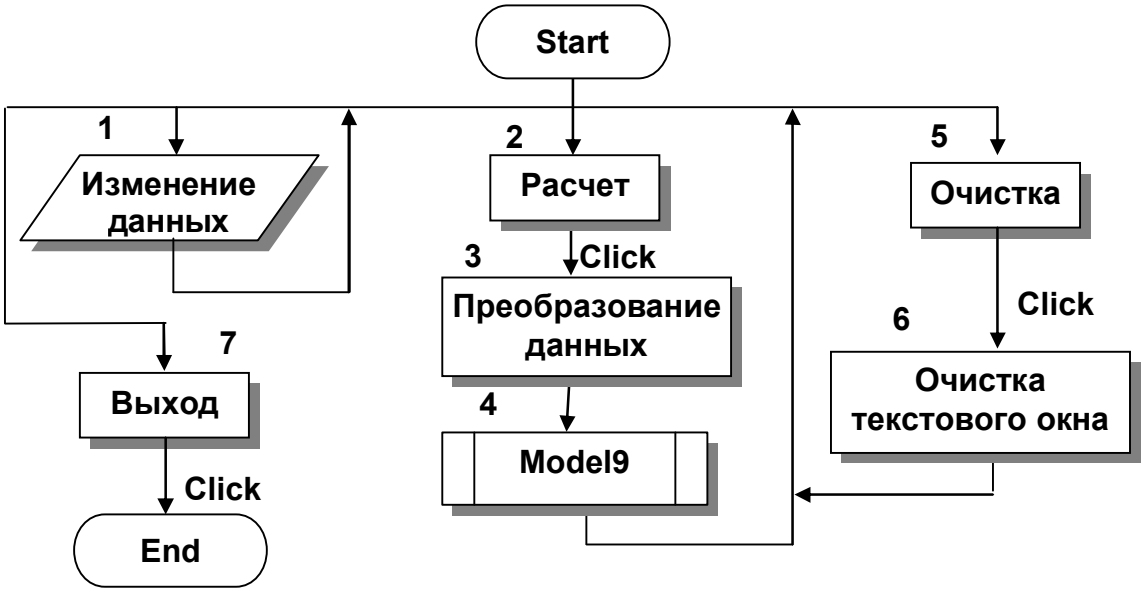


Рис. 2. Схема алгоритма процедур обработки объектов

После нажатия кнопки "Start" активизируется стартовая форма. С этого момента программа находится в режиме ожидания действий пользователя.

Цифрой 1 обозначено действие, заключающееся в корректировке исходных данных. Необходимые изменения вносятся в соответствующие текстовые поля.

Цифрой 2 обозначено действие, заключающееся в нажатии (с помощью мыши) кнопки "Расчет". В процедуре, связанной с этой кнопкой, оператор 3 осуществляет перевод исходных данных из символьной формы в числовую. Затем оператор 4 обращается к модулю общего назначения "Model9". После окончания работы модуля и выдачи на экран результатов моделирования работа процедуры, связанной с кнопкой "Расчет", заканчивается. Программа вновь переходит в режим ожидания действий пользователя.

Цифрой 5 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Очистка". В процедуре, связанной с ней, производится очищение текстовых полей для вывода выходных характеристик модели. Затем может быть произведено изменение исходных данных и проведены новые расчеты с использованием кнопки "Расчет".

Цифрой 7 на схеме обозначено действие пользователя, заключающееся в нажатии кнопки "Выход". В результате работа программы прекращается.

Схема алгоритма модуля общего назначения "Model9" показана на рис. 3.

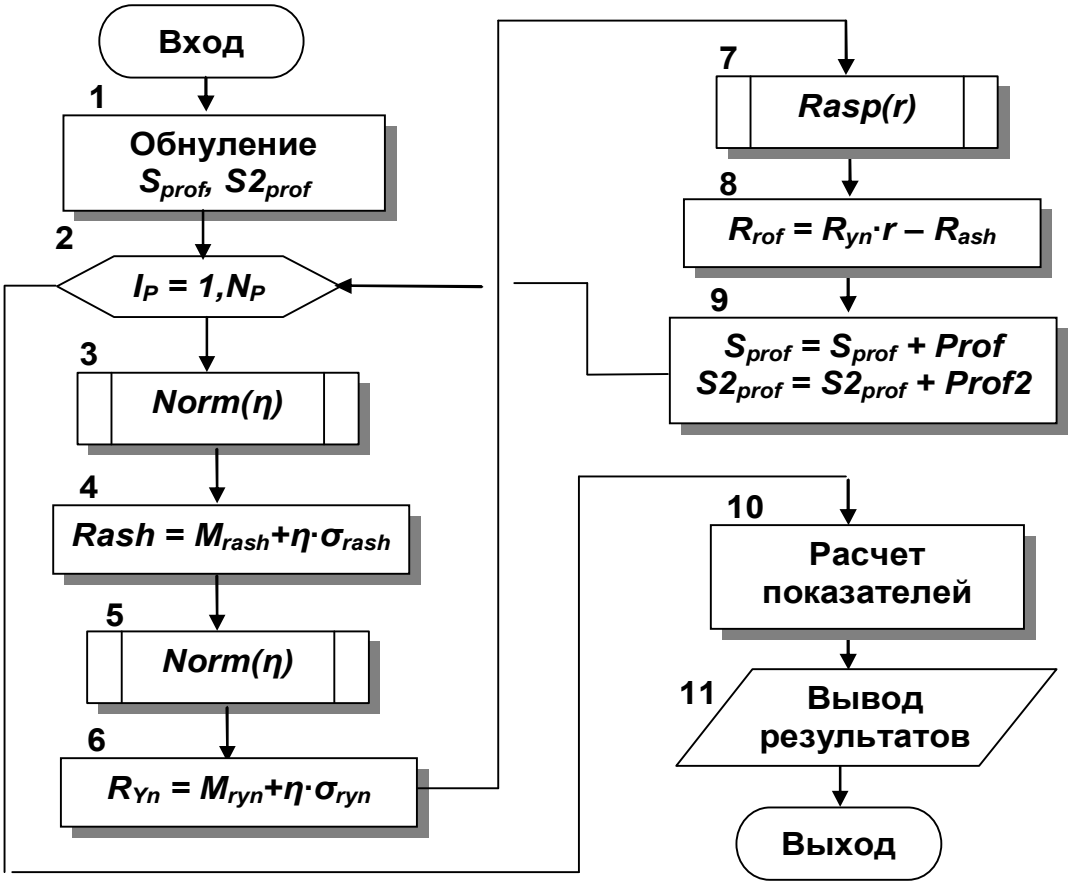


Рис. 3. Схема алгоритма модуля "Model9"

Оператор 1 производит обнуление глобальных переменных, к которым относятся:

• сумма прибылей для всех случайных реализаций;

• сумма квадратов прибылей для всех случайных реализаций.

Оператор 2 является началом цикла случайных реализаций.

Оператор 3 обращается к процедуре, вырабатывающей возможные значения нормированных и центрированных случайных величин с нормальным распределением. Оператор 4 определяет случайное значение эксплуатационных расходов.

Операторы 5 и 6 аналогичным образом определяют случайную величину емкости рынка.

Оператор 7 обращается к процедуре, которая определяет возможное значение случайной доли предприятия в рынке. Оператор 8 определяет величину случайной прибыли для одной реализации моделируемого процесса. В операторе 9 происходит накопление сумм прибылей и сумм квадратов прибылей для всех случайных реализаций.

После окончания цикла случайных реализаций оператор 10 определяет показатель эффективности по формуле

$$G_{prof} = M_{prof} - K_{\alpha} \cdot \sigma_{prof}.$$

Оператор 11 выводит результаты моделирования на экран.

Случайная доля предприятия в рынке, согласно принятому допущению, имеет кусочно-равномерное распределение в выбранном диапазоне. Схема алгоритма процедуры, генерирующей возможные значения случайной величины с таким распределением, показана на рис. 4.

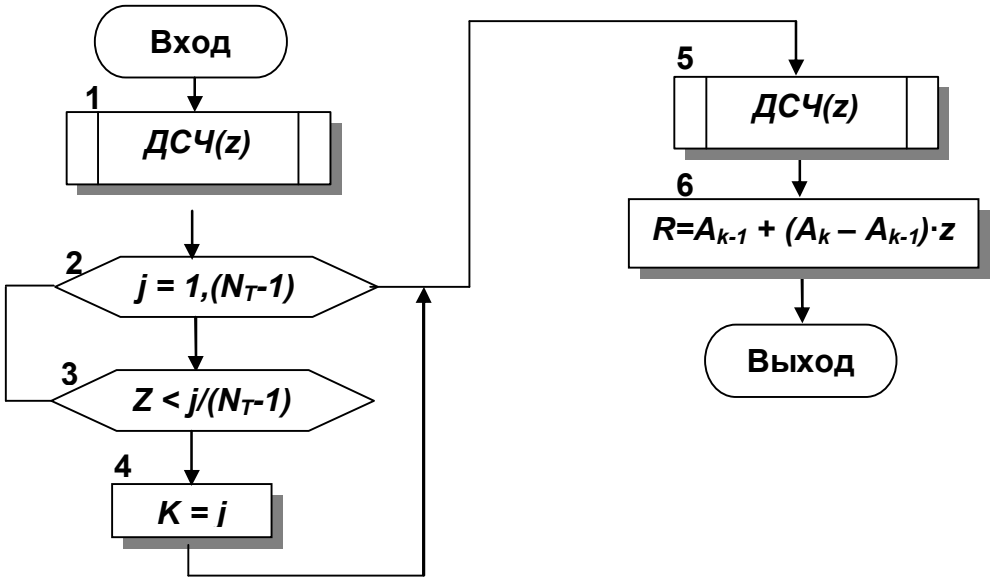


Рис. 4. Схема алгоритма процедуры генерации случайных величин с кусочно-равномерным распределением

Оператор 1 обращается к стандартной процедуре генерирования случайной величины с равномерным распределением в интервале (0,1).

Оператор 2 является заголовком цикла, в котором поочередно рассматриваются все участки выбранного диапазона. Заметим, что число участков на единицу меньше числа граничных точек.

Оператор 3 проверяет условие попадания в j-й участок, а оператор 4 фиксирует номер участка.

Оператор 5 вновь обращается к генератору случайных чисел с равномерным распределением в интервале (0,1).

Оператор 6 определяет значение случайной переменной z по формуле

$$z = A_{k-1} + Z \cdot (A_k - A_{k-1}).$$

4. Пример решения задачи моделирования

Примем следующие исходные данные:

- среднее значение эксплуатационных расходов M_{rash} = \$110000;
- среднее квадратическое отклонение эксплуатационных расходов S_{rash} = \$11000;
- среднее значение емкости рынка M_{ryn} = \$2750000;
- среднее квадратическое отклонение емкости рынка σ_{ryn} = \$250000;
- число случайных реализаций N_P = 10000.

Варьируемыми переменными будем считать параметры кусочно-равномерного распределения доли предприятия в рынке.

Рассмотрим три варианта распределения.

Для первого варианта примем, что число граничных точек $N_T = 2$ (диапазон состоит из одного участка). Пусть среднее значение доли равно 0,1. Граничные точки расположим симметрично относительно среднего значения. Выберем следующие значения их координат:

$$A_0 = 0{,}099 \text{ и } A_1 = 0{,}101.$$

Таким образом, для первого варианта степень неопределенности достаточно мала, доля предприятия в рынке практически постоянна и составляет 10% общей емкости рынка.

Для второго варианта примем, что число граничных точек $N_T = 6$ (диапазон состоит из пяти участков). Пусть среднее значение случайной переменной по-прежнему равно 0,1. Граничные точки расположим симметрично относительно среднего значения. Выберем следующие значения их координат:

$$A_0 = 0{,}035;\ A_1 = 0{,}075;\ A_2 = 0{,}095;\ A_3 = 0{,}105;\ A_4 = 0{,}125;\ A_5 = 0{,}165.$$

Плотности распределения вероятностей определяются из условия, что вероятности попадания на любой из участков должны быть одинаковы и равны величине $1/(N_T - 1)$. Вид полученного распределения показан на рис. 5.

Таким образом, для второго варианта доля предприятия в рынке характеризуется достаточной степенью неопределенности. Случайная величина этой доли неравномерно распределена в диапазоне от 0,035 до 0,165.

Для третьего варианта примем, что число граничных точек N_T также равно шести (диапазон состоит из пяти участков).

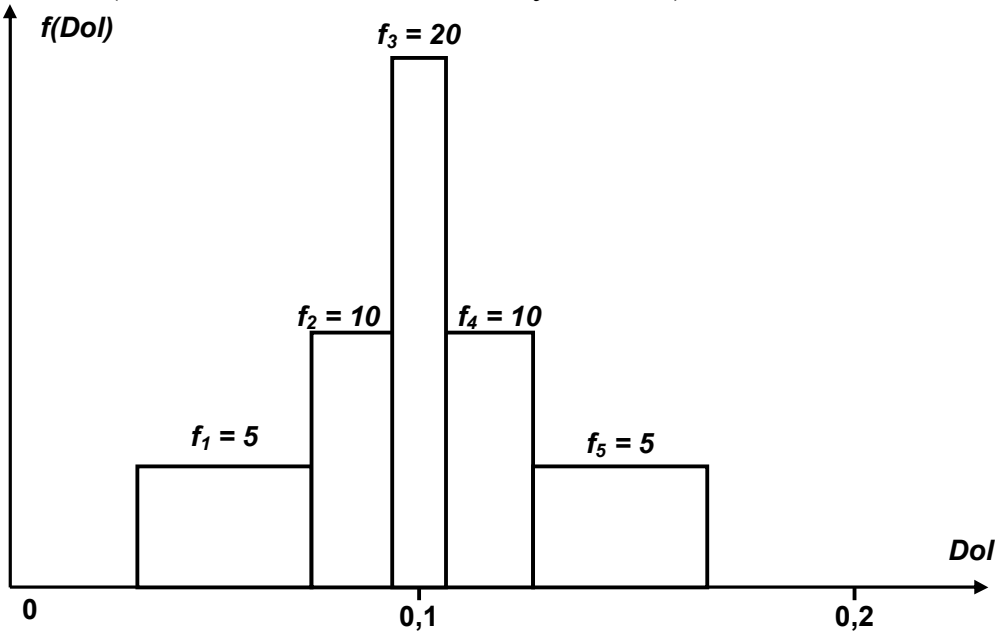


Рис. 5. Кусочно-равномерное распределение доли в рынке (второй вариант)

Пусть среднее значение случайной переменной по-прежнему равно 0,1. Граничные точки расположим несимметрично относительно значения *Dot* = 0,1. Выберем следующие значения координат:

A_o = 0,035; A_1 = 0,075; A_2 = 0,095; A_3 = 0,105; A_4 = 0,155; A_5 = 0,255.

Так же, как и для других вариантов, условие, которому должно удовлетворять кусочно-равномерное распределение, состоит в том, что вероятности попадания на любой из участков должны быть одинаковыми и равными величине 1/ $(N_T—l)$. Вид полученного распределения показан на рис. 6.

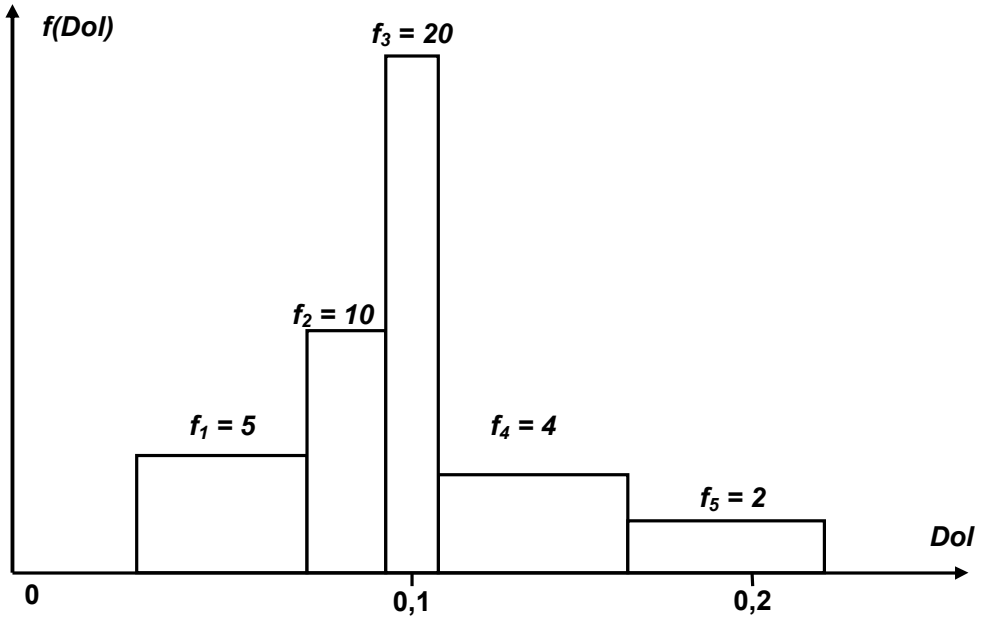


Рис. 6. Кусочно-равномерное распределение доли в рынке (третий вариант)

Таким образом, для третьего варианта доля предприятия в рынке характеризуется еще большей неопределенностью. Случайная величина этой доли неравномерно распределена в диапазоне от 0,035 до 0,255.

Варианты исходных данных, относящиеся к описанию кусочно-равномерных распределений доли предприятия в рынке, сведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры кусочно-равномерных распределений

Номер варианта	Число точек	Координаты точек (границ участков)					
		1	2	3	4	5	6
1	2	0, 099	0,101	-	-	-	-
2	6	0, 035	0,075	0,095	0,105	0,125	0,165
3	6	0, 035	0,075	0,095	0,105	0,155	0,225

Таблица 2

Результаты моделирования

Номер варианта	M_{prof}, $	S_{prof}, $	G_{prof}, $
1	164,6	27,2	129,8
2	165,2	90,8	49,0
3	205,1	150,9	11,9

Анализ приведенных данных показывает, что с увеличением степени неопределенности при описании доли предприятия в рынке средняя прибыль растет, однако минимальная гарантированная прибыль уменьшается из-за увеличения разброса случайной величины прибыли.

Приложение Б

Программа финансовой модели Герца на языке Visual Basic 6.0

1. Стартовая форма frmForml

Макет стартовой формы приведен на рис. 1 Приложения А.

1.1. Таблица свойств

Объекты	Свойства	Значения
Командная кнопка 1	Name Caption	Command 1 Расчет
Командная кнопка 2	Name Caption	Command2 Очистка
Командная кнопка 3	Name Caption	Command3 Выход

1.2. Процедуры обработки объектов

```
Private Sub Command1_Click()
   Mrash = Val(Textl): SigRash = Val(Text2): Mrynok = Val(Text3)
   SigRynok = Val(Text4): Nr = Val(Text5): NT = Val(Text6)
   a(0) = Val(Text7): a(l) = Val(Text8): a(2) = Val(Text9)
   a(3) = Val(TextlO): a(4) = Val(Textll): a(5) = Val(Textl2)
   Ver = 1 / (NT - 1)                    ' вероятность попадания в участок
   Call Modul6                           ' обращение к модулю
End Sub
Private Sub Command2_Click()
   Textl3 = «»: Textl4 = «»: Textl5 = «»
End Sub
Private Sub Command3_Click()
   End
End Sub
```

2. Модуль общего назначения

```
Public a(5) As Single, n As Single, z As Single
Public r As Single, NT As Integer, Ver As Single
Public Sprof As Double, Sprof2 As Double, Mrash
Public SigRash, Mrynok, SigRynok, Nr, I, Dol, Prof
Public Rynok, Rash, Mprof, SigProf, Disp, Gprof
Public Sub Modul9()
```

```
                    ' Обнуление глобальных переменных:
Sprof=0:Sprof2 = 0
                    ' Цикл случайных реализаций:
    For Ir = 1 To Nr
Call Norm: Rash = Mrash + n * SigRash
Call Norm: Rynok = Mrynok + n * SigRynok
Call Rasp: Dol = r
Prof = Rynok * Dol - Rash
Sprof = Sprof + Prof
   Sprof2 = Sprof2 + Prof * Prof
Next Ir
Mprof = Sprof/Nr
Disp = (SproO - Nr * Mprof * Mprof) / (Nr - 1)
     If Disp > 0 Then SigProf = Sqr(Disp) Else SigProf = 0
Gprof = Mprof- 1.28 * SigProf
                    ' Результаты моделирования:
   Forml.Textl3 = Format$(Mprof, "#######")
   Forml.Textl4 = Format$(SigProf, "#######")
   Forml.Textl5 = Format$(Gprof, "#######")
End Sub
Sub Norm()
      S = 0
     For j = 1 To 12
z = Rnd(l): S = S + z
Next
   n = S-6
End Sub

Sub Rasp()
     z = Rnd(l)
      For j = 1 To NT - 1
  Ifz<=Ver*jThen
                M=j:GoToMet
         End If
      Next
Met:
z = Rnd(l)
   r = a(M - 1) + (a(M) - a(M - 1)) * z
End Sub
```

Задание 13. Провести параметрический анализ и построить математическую модель бройлерного хозяйства птицеводческой фермы

1. Исходные данные

Бройлерное хозяйство птицеводческой фермы насчитывает **20000** цыплят, которые выращиваются до **8**-недельного возраста и после соответствующей обработки поступают в продажу. Хотя недельный расход корма для цыплят зависит от их возраста, в дальнейшем будем считать, что в среднем (за **8** недель) он составляет **1** фунт.

Для того чтобы цыплята достигли к восьмой неделе необходимых весовых кондиций, кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Этим требованиям могут соответствовать смеси различных видов кормов или ингредиентов. В качестве ингредиентов рассмотрим три: известняк, зерно и соевые бобы. Требования к питательности рациона сформулируем, учитывая три вида питательных веществ: кальций, белок и клетчатку. В таблице приведены данные, характеризующие содержание (по весу) питательных веществ в каждом из ингредиентов и удельную стоимость каждого ингредиента. Заметим, что известняк не содержит ни белка, ни клетчатки.

Ингредиент	**Содержание питательных веществ, фунт/(фунт ингредиента)**			**Стоимость, долл./фунт**
	кальций	**белок**	**клетчатка**	
Известняк	0,38	-	-	0,04
Зерно	0,002	0,09	0,02	0,15
Соевые бобы	0,002	0,50	0,08	0,40

Смесь должна содержать:

1. не менее **0,8**%, но не более **1,2**% кальция;
2. не менее **22**% белка;
3. не более **5**% клетчатки.

2. Задача

Требуется определить для птицеводческой фермы количество (в фунтах) каждого из трех ингредиентов, образующих смесь минимальной стоимости при соблюдении требований к общему расходу кормовой смеси и ее питательности.

3. Порядок решения

Введем следующие обозначения: x_1 – содержание известняка (в фунтах) в смеси, x_2 – содержание зерна (в фунтах) в смеси, x_3– содержание соевых бобов (в фунтах) в смеси.

В качестве (минимизируемой) целевой функции выступает общая стоимость смеси, определяемая по формуле:

$$0{,}04x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}40\,x_3.$$

Минимальная общая масса смеси, еженедельно расходуемой на кормление **20000** цыплят, равен **20000** фунтов. Так как x_1, x_2 и x_3 представляют веса трех ингредиентов, используемых для составления смеси, то общая масса смеси будет равна $(x_1 + x_2 + x_3)$, причем эта сумма не должна быть меньше **20000** фунтов.

Теперь обратим внимание на требования, предъявляемые к смеси с точки зрения питательности. Так как общий расход кормов равен $(x_1 + x_2 + x_3)$, то содержание кальция должно находиться в пределах от 0,008 $(x_1 + x_2 + x_3)$ до 0,012 $(x_1 + x_2 + x_3)$. В соответствии с таблицей исходных данных содержание кальция, обусловленное включением в смесь x_1 фунтов известняка, x_2 фунтов зерна и x_3 фунтов соевых бобов, равно $0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3$. Отсюда следует, что ограничения, связанные с содержанием кальция в кормовом рационе, можно представить в следующем виде:

1. Смесь должна содержать не менее **0,8**% кальция:

$$0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \geq 0{,}008(x_1 + x_2 + x_3).$$

2. Смесь должна содержать не более **1,2**% кальция:

$$0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 \leq 0{,}012(x_1 + x_2 + x_3).$$

Эти ограничения можно записать в более простой форме, объединив в левых частях неравенств члены, содержащие x_1, x_2 и x_3:

$$0{,}372x_1 - 0{,}007x_2 - 0{,}006x_3 \geq 0$$
$$0{,}368x_1 - 0{,}011x_2 - 0{,}010x_3 \leq 0.$$

Аналогично записываются условия по оставшимся питательным веществам.

Окончательная математическая формулировка задачи может быть представлена в следующем виде:

$$z = 0{,}04x_1 + 0{,}15\,x_2 + 0{,}40x_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$0{,}372x_1 - 0{,}007x_2 - 0{,}006x_3 \geq 0,$$
$$0{,}368x_1 - 0{,}011x_2 - 0{,}010x_3 \leq 0,$$
$$0{,}220x_1 + 0{,}130x_2 - 0{,}280x_3 \geq 0$$
$$0{,}050x_1 + 0{,}030x_2 - 0{,}030\,x_3 \leq 0.$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.

2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).

3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2)

4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.

5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

5. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 14. Провести параметрический анализ и построить математическую модель промышленной фирмы с целью решения задачи максимизации выпуска продукции

1. Исходные данные

Промышленная фирма производит изделие, представляющее собой сборку из трех различных узлов. Эти узлы изготовляются на двух заводах. Из-за различий в составе технологического оборудования производительность заводов по выпуску каждого из трех видов узлов неодинакова. В приводимой ниже таблице содержатся исходные данные, характеризующие как производительность заводов по выпуску каждого из узлов, так и максимальный суммарный ресурс времени, которым в течение недели располагает каждый из заводов для производства этих узлов.

Завод	Максимальный недельный фонд времени, ч	Производительность, узел/ч		
		узел 1	узел 2	узел 3
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Идеальной является такая ситуация, когда производственные мощности обоих заводов используются таким образом, что в итоге обеспечивается выпуск одинакового количества каждого из видов узлов. Однако этого трудно добиться из-за различий в производительности заводов. Более реальная цель состоит в том, чтобы максимизировать выпуск изделий, что, по существу, эквивалентно минимизации дисбаланса, возникающего вследствие некомплектности поставки по одному или двум видам узлов. Возможный объем производства каждого из трех видов узлов зависит от того, какой фонд времени выделяет каждый завод для их изготовления.

2. Задача

Требуется определить еженедельные затраты времени (в часах) на производство каждого из трех видов узлов на каждом заводе, не превышающие в сумме временные ресурсы каждого завода и обеспечивающие максимальный выпуск изделий.

3. Порядок решения

Пусть x_{ij} - недельный фонд времени (в часах), выделяемый на заводе i для производства узла j. Тогда объемы производства каждого из трех комплектующих узлов будут равны:

узел 1: $8x_{11} + 6x_{21}$,

узел 2: $5x_{12} + 12x_{22}$,

узел 3: $10x_{13} + 4x_{23}$.

Так как в конечной сборке каждый из комплектующих узлов представлен в одном экземпляре, то количество конечных изделий должно быть равно количеству комплектующих узлов, объем производства которых минимален. Поэтому количество конечных изделий можно выразить через число комплектующих узлов следующим образом:

$$\min\{8x_{11} + 6x_{21},\ 5x_{12} + 12x_{22},\ 10x_{13} + 4x_{23}\}.$$

Условия рассматриваемой задачи устанавливают ограничения только на фонд времени, которым располагает каждый завод. Тогда математическую модель можно представить в следующем виде:

$$z = \min\{8x_{11} + 6x_{21},\ 5x_{12} + 12x_{22},\ 10x_{13} + 4x_{23}\} \to \max$$

при ограничениях

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 80$$

$$x_j \ge 0,\ \ i = 1, 2,\ \ j = 1, 2, 3.$$

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.

2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).

3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2).

4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.

5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

5. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 15. Разработать математическую модель предприятия, выпускающего два вида продукции из двух видов сырья, с целью решения задачи увеличения выпуска продукции за счет приобретения нового оборудования и сверхурочных часов работы

1. Исходные данные

На предприятии производятся два вида продукции из двух видов сырья. Производство единицы продукта *1* (первого вида) приносит предприятию доход, равный 10 единицам, а производство единицы продукта *2* (второго вида) - доход в 8 единиц. Переработка сырья производится аппаратами двух типов, которые условно называются в дальнейшем машинами и агрегатами. На переработке сырья первого вида занято пять машин, причем производственные условия не допускают, чтобы суммарное время использования машин на этой работе превышало 40 ч (за некоторый период). На переработке сырья второго вида занято 25 агрегатов; суммарное время их использования в течение того же периода не должно превышать 200 ч. При производстве единицы продукта 1 на переработку сырья первого вида затрачивается 4 ч и на переработку сырья второго вида - 9 ч, в то время как производство единицы продукта *2* требует затраты 3 ч на переработку каждого из видов сырья.

На предприятии принимается решение увеличить выпуск продукции как за счет приобретения нового оборудования тех типов, что и имеющиеся, так и за счет сверхурочных часов работы.

Максимальное число сверхурочных часов, приходящихся на период, равно восьми, причем эти часы должны распределяться на переработку первого и второго видов сырья равномерно. Доплата за час сверхурочной работы на переработке любого из видов сырья одинакова; полная оплата за час сверхурочной работы равна 2 единицам. Повышение затрат за период, связанный с приобретением одной машины, перерабатывающей сырье первого вида, составляет 10 единиц. Агрегаты, перерабатывающие сырье второго вида, дополнительно не приобретаются.

2. Задача

Необходимо максимизировать доход от выпуска продукции.

3. Порядок решения

Задачу максимизации дохода от выпуска продукции можно записать как задачу математического программирования:

$$z = 10x_1 + 8x_2 - 10y_1 - 2y_2 \to \max$$

при ограничениях

$$4x_1 + 3x_2 - 8y_1 - (5 + y_1)y_2 \le 40;$$

$$9x_1 + 3x_2 - 25y_2 \le 200;$$

$$y_2 \le 8;$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0.$$

Здесь через x_1и x_2 обозначены соответственно искомые количества производимых продуктов первого и второго видов, через y_1 - количество приобретаемых дополнительных машин для переработки сырья первого вида и через y_2 - число часов сверхурочной работы. Целевая функция представляет собой величину суммарного дохода. Первое ограничение связано с невозможностью превысить лимит времени на переработку сырья первого вида, второе - с невозможностью превысить лимит времени на переработку сырья второго вида, третье ограничение и условие неотрицательности переменных самоочевидны.

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.
2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).
3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2).
4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.
5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

5. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.
2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.
3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.
4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 16. Разработать математическую модель предприятия с целью решения задачи максимизации общей прибыли за счет распределения имеющихся средств

1. Исходные данные

Для обеспечения нормальной работы оборудования необходимо закупить n видов запасных частей на сумму d рублей. Стоимость j-й детали равна b_j, потребность в ней есть случайная величина y_i, имеющая показательный закон распределения с параметром a_j. Использование j-й детали позволяет получить прибыль c_j. Отсутствие детали в случае необходимости приводит к убыткам r_j. Если деталь не используется в данном периоде, то убыток составляет q_j.

2. Задача

Как распределить имеющиеся средства, чтобы общая прибыль была наибольшей?

3. Порядок решения

Пусть x_j - количество закупленных деталей j-го вида. Так как потребность в этих деталях равна y_i, то доходы и издержки определяются в зависимости от соотношения между величинами x_j и y_i:

$y_i > x_j$, тогда доход $c_j y_j$, убытки $q_j(x_j - y_i)$;

$y_i > x_j$, тогда доход $c_j x_j$, убытки $r_j(y_j - x_i)$.

Значит, прибыль от деталей j-го вида можно определить следующим образом:

$$f_j = \begin{cases} c_j y_j - q_j(x_j - y_j), & y_j \le x_j, \\ c_j x_j - r_j(y_j - x_j), & y_j \ge x_j. \end{cases}$$

Но так как y_i - величина случайная, то и прибыль - тоже случайная величина. Следовательно, мы должны максимизировать не саму прибыль, а ее математическое ожидание:

$$M(f_j) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j p(y_j) dy_j.$$

Здесь

$$p(y_j) = \begin{cases} 0, & y_j < 0, \\ a_j e^{-a_j y_j}, & y_j \ge 0 \end{cases}$$

плотность распределения случайной величины y_j . Тогда

$$M(f_j) = \int_0^{x_j} a_j e^{-a_j y_j} (c_j y_j - q_j(x_j - y_j) dy_j + \int_{x_j}^{\infty} a_j e^{-a_j y_j} (c_j x_j - r_j(y_j - x_j) dy_j.$$

Общая ожидаемая прибыль вычисляется как сумма математических ожиданий прибылей от деталей всех видов. Ограничения задачи связаны с

невозможностью превысить сумму, выделенную на закупку деталей. Кроме того, из характера переменных x_j вытекают условия их неотрицательности и целочисленности. В результате получаем следующую математическую модель:

$$z = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_0^{x_j} a_j e^{-a_j y_j} (c_j y_j - q_j (x_j - y_j) dy_j + \int_{x_j}^{\infty} a_j e^{-a_j y_j} (c_j x_j - r_j (y_j - x_j) dy_j \right] \to \max$$

при ограничениях

$$j = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \le d,$$

$$x_j \ge 0 \text{ – целые, } j = 1,..,n.$$

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.

2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).

3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2).

4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.

5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

1. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.

2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.

3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.

4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 17. Поставить и формализовать задачу минимизации суммарных затрат на перевозку грузов автотранспортной компании в форме задачи математического программирования по заданным условиям

1. Исходные данные

Автотранспортная компания для перевозки грузов располагает четырьмя автомашинами следующей грузоподъемности: машина **1** – ***2*** т, машина **2** и машина **3** – по ***5*** т, машина **4** – ***8*** т. Для каждой автомашины известна стоимость ее эксплуатации за день: для машины **1** – ***15*** единиц, для машины **2** – ***20*** единиц, для машины **3** – ***19*** единиц, для машины **4** – ***30*** единиц. Необходимо в течение одного дня развести грузы четырем получателям. В книжный магазин нужно доставить груз массой в **1** т, в мебельный магазин – в **3** т, в фермерское хозяйство – в **5** т и на сталелитейный завод – в **8** т. Предположим, что одна и та же машина не может доставлять груз в книжный или мебельный магазин и на ферму.

2. Задача

Требуется так назначить автомашины для доставки всех грузов, чтобы суммарные затраты были минимальными.

3. Порядок решения

Задачу минимизации суммарных затрат на перевозку грузов можно записать как задачу математического программирования:

$$z = \sum_{i=1}^{4} (15x_{i1} + 20x_{i2} + 19x_{i3} + 30x_{i4}) \to \min$$

при ограничениях

$$2x_{11} + 5x_{12} + 5x_{13} + 8x_{14} \geq 1;$$
$$2x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} \geq 3;$$
$$2x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} + 8x_{34} \geq 5;$$
$$2x_{41} + 5x_{42} + 5x_{43} + 8x_{44} \geq 8;$$
$$x_{1j} + x_{3j} = 1,\ j = 1,..,4;$$
$$x_{2j} + x_{3j} = 1,\ j = 1,..,4;$$
$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Здесь через x_{ij} обозначен факт поставки i-му потребителю груза j-й машиной, т.е.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ если машина } j \textit{ перевозит груз потребителю } i, \\ 0, \textit{ в противном случае}, i, j = 1,..,4. \end{cases}$$

Все получатели грузов пронумерованы: *1* - книжный магазин, *2* - мебельный магазин, *3* - фермерское хозяйство, *4* - сталелитейный завод. Целевая функция представляет собой суммарные затраты. Первых четыре

ограничения связаны с необходимостью доставить получателям нужное им количество груза, следующие - с невозможностью одновременного использования одной машины на некоторых маршрутах.

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.
2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).
3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2).
4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.
5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

1. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.
2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.
3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.
4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Задание 18. Формализовать задачу функционирования нефтеперерабатывающего завода и решить задачу оптимальной организации его работы

1. Исходные данные

Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти: сортом **А** в количестве **10** единиц, сортом **В** – **15** единиц. При переработке из нефти получают два материала: бензин (обозначим **Б**) и мазут (**М**). Имеются три варианта технологического процесса переработки:

I: 1ед.**А** + 2ед.**В** дает 3ед.**Б** + 2ед.**М**

II: 2ед.**А** + 1ед.**В** дает 1ед.**Б** + 5ед.**М**

III: 2ед.А + 2ед.**В** дает 1ед.**Б** + 2ед.**М**

Цена бензина – 10 долл. за единицу, мазута – **1** долл. за единицу.

Требуется определить наиболее выгодное сочетание технологических процессов переработки имеющегося количества нефти.

Перед моделированием уточним следующие моменты. Из условия задачи следует, что "выгодность" технологического процесса для завода следует понимать в смысле получения максимального дохода от реализации своей готовой продукции (бензина и мазута). В связи с этим понятно, что "выбор (принятие) решения" завода состоит в определении того, какую технологию и сколько раз применить. Очевидно, что таких возможных вариантов достаточно много.

2. Задача

Определить наиболее выгодное сочетание технологических процессов переработки имеющегося количества нефти.

3. Порядок решения

Обозначим неизвестные величины:

$\boldsymbol{x}_i$ – количество использования i-го технологического процесса ($i=1,2,3$).

Остальные параметры модели (запасы сортов нефти, цены бензина и мазута) *известны*.

Теперь одно конкретное решение завода сводится к выбору одного вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)$, для которого выручка завода равна ($32x_1+15x_2+12x_3$) долл. Здесь **32** долл. – это доход, полученный от одного применения первого технологического процесса (**10** долл. · 3ед.**Б** + **1** долл. · 2ед.**М** = **32** долл.). Аналогичный смысл имеют коэффициенты **15** и **12** для второго и третьего технологических процессов соответственно. Учет запаса нефти приводит к следующим условиям:

для сорта А: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10$

для сорта В: $2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15$,

где в первом неравенстве коэффициенты x_1, x_2, x_3, равные соответственно **1**, **2**, **2**, – это нормы расхода нефти сорта **А** для одноразового применения технологических процессов **I, II, III** соответственно. Коэффициенты второго неравенства имеют аналогичный смысл для нефти сорта **В**.

Математическая модель в целом имеет вид:

Найти такой вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, чтобы максимизировать

$$f(x) = 32x_1 + 15x_2 + 12x_3$$

при выполнении условий:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15,$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ – целые числа})$$

Сокращенная форма этой записи такова:

$$f(x) = 32x_1 + 15x_2 + 12x_3 \to \max$$

при ограничениях:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 10,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 15, \qquad (1)$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0 \qquad (x_1, x_2, x_3 \text{ – целые числа}).$$

Мы получили так называемую задачу линейного программирования.

Модель (1) является примером оптимизационной модели детерминированного типа (с вполне определенными элементами).

4. Задания для самостоятельной работы

1. Сформировать блок-схему алгоритма решения поставленной задачи.
2. Разработать программу решения поставленной задачи в среде Visual Basic 6.0 или в любой другой среде (по выбору студента).
3. С использованием базовой технологии Excel 2000 сформировать таблицу исходных данных (взамен выполнения п. 2).
4. С использованием встроенных функций Excel 2000 произвести расчет и решение поставленной задачи оптимизации для пяти различных вариантов набора исходных данных с учетом поставленных ограничений.
5. Представить полученные результаты в виде графиков и диаграмм.

5. Рекомендуемые источники

1. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1 / Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Арунянца Г.Г., Пагиева К.Х. – Владикавказ: Олимп, 2001. – 600 с.
2. Блаттнер П. Использование Microsoft Excel 2002 [Текст]: специальное издание / пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2002. – 864 с.
3. Гарнаев А.Ю. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах [Текст]. – СПб.: БХВ – Санкт-Петербург, 1999. – 336 с.
4. Карлберг К. Бизнес-анализ с помощью Excel [Текст] / пер с англ. – Киев: Диалектика, 1997. – 448 с.

Библиографический список

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]. – М.: Высшая школа, 1993. – 336 с.

2. Арунянц Г.Г. Информационные технологии в экономике [Текст]: практикум. Часть 1/ Г.Г. Арунянц, А.Ю. Калинкин, Д.Н. Столбовский; под ред. Г.Г. Арунянца, К.Х. Пагиева. – Владикавказ: Олимп, 2001 – 600 с.

3. Бережная Е.В. Математические методы и моделирование экономических систем [Текст]: уч. пособие / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.

4. Бережной В.И. Экономико-математические методы и модели в примерах и задачах [Текст]/ В.И. Бережной, Е.В. Бережная. – Ставрополь: Интеллект-сервис, 1996. – 188 с.

5. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем [Текст]. – М.: Наука, 1978.

6. Варфоломеев В.И. Алгоритмическое моделирование элементов экономических систем: практикум [Текст]: уч. пособие / В.И. Варфоломеев, С.В. Назаров. – 2-е изд. доп. и перераб./ под ред. С.В. Назарова. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 254 с.

7. Варфоломеев В.И. Имитационное моделирование экономических систем [Текст]. – М.: МГУК, 1997.

8. Вентцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Радио и связь, 1983. – 415 с.

9. Горчаков А.А. Компьютерные экономико-математические модели [Текст] / А.А. Горчаков, И.В. Орлова. – М.: Компьютер, 1995. – 135 с.

10. Данилов Н.Н. Курс математической экономики [Текст]. – Новосибирск: СО РАН, 2002. – 445 с.

11. Елисеева И.И. Общая теория статистики [Текст]/ И.И. Елисеева, М.М. Юзбашев. – М.: Финансы и статистика, 1999

12. Лабскер Л.Г. Математическое моделирование финансово-экономических ситуаций с применением компьютера [Текст] / Л.Г. Лабскер [и др.]. – М.: МЭСИ, 1998.

13. Романцев В.В. Моделирование систем массового обслуживания [Текст]/ В.В. Романцев, С.А. Яковлев. – СПб.: Поликом, 1995.

14. Сабинин О.Ю. Статистическое моделирование технических систем [Текст]. – СПб.: Изд. ЭТУ, 1993.

15. Фёрстер Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа [Текст] / Э. Фёрстер, Б. Ренц. – М.: Финансы и статистика. 1983. – 383 с.

16. Фомин Г.П. Системы и модели массового обслуживания в коммерческой деятельности [Текст]: уч. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000.

17. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике [Текст]: уч. пособие. – М.: БЕК, 1998.

18. Чатыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике [Текст]. – М.: Статистика, 1971.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Процентные точки распределения Стьюдента (t_k)

Число степеней свободы	Уровень значимости					
	20	**10**	**5**	**2**	**1,0**	**0,05**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089
3	1,638	353	3,152	4,541	5,841	7,453
4	533	132	2,776	3,747	4,604	5,598
5	476	0,15	571	365	0,32	4,773
6	4440	1,943	447	143	3,307	317
7	415	895	365	299	499	29
8	397	860	306	890	355	3,833
9	383	833	262	821	250	690
10	372	812	226	764	169	581
11	363	796	201	718	108	497
12	356	872	179	681	0,55	428
13	350	771	160	650	0,12	372
14	345	716	145	624	2,977	326
15	341	553	131	602	947	286
16	337	746	120	583	921	252
17	333	740	111	567	898	222
18	1,330	734	101	552	878	197
19	1,328	729	93	539	861	174
20	325	725	86	528	845	153
21	323	721	80	518	831	135
22	321	717	74	503	819	119
23	319	714	69	500	807	104
24	318	711	64	492	2,80	91
25	1,316	1,706	2,60	2,485	2,787	3,078
26	215	706	56	479	779	67
27	314	703	52	473	771	57
28	313	701	43	467	763	47
29	311	699	45	462	756	38
30	310	697	42	467	750	20
40	303	684	21	423	704	2,971
60	296	671	000	390	660	2,915
120	289	658	1,980	358	617	2,860
∞	282	645	1,960	326	576	2,807

Приложение 2

Процентные точки распределения Фишера

(при $a = 0,05,\ f_1 = m,\ f_2 = n - m - 1$**)**

Число степеней свободы f_2	f_1															
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**14**	**15**	**16**	**20**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243	244	245	246	246	248,0
2	18,51	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	14,4	19,41	19,42	19,43	19,41	19,45
3	10,13	9,55	9,25	9,12	9,05	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,71	8,70	8,69	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,59	5,93	5,91	5,87	5,86	5,84	5,80
5	6,65	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,7	4,68	4,64	4,62	4,6	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,26	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,0	3,96	3,94	3,92	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,13	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,6	3,57	3,52	3,51	3,49	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,53	3,5	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,23	3,23	3,2	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,1	3,07	3,02	3,01	2,93	2,94
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3 22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	7 86	2 85	2 82	2,77
11	4,84	3,89	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,9	2,35	2,82	2,79	2,74	2,74	2,7	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,0	2,91	2,85	2,8	2,75	2,72	2,69	2,64	2,62	2,6	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,6	2,55	2,53	2,51	2,46
14	4,6	8,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,7	2,65	2,6	2,56	2,53	2,48	2,46	2,44	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,43	2,4	2,39	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,37	2,35	2,33	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	27	761	2 55	2,49	7 43	741	138	133	731	7 79	7 23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	7 66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,29	7 77	2,25	119
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,26	2,23	2,21	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	3,31	2,38	2,23	2,2	2,18	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,63	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,2	2,13	2,15	2,10
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,4	2,34	2,3	2,26	2,28	2,18	2,15	2,13	2,07
23	4,23	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	*21*	7 14	113	110	105
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,61	2,42	2,36	2,3	2,25	2,22	2,18	2,13	2,11	2,09	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49	2,4	2,34	2,28	2,24	2,2	2,16	2,11	2,09	2,06	2,01

Г.Г. Арунянц

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Практикум

Редактор Э.С. Круглова

Изд. лиц. ЛР № 071456 от 23.06.97 г. Подписано в печать 20.05.09 г.
Бумага для множительных аппаратов. Формат 60 х 84/16.
Гарнитура Таймс. Ризограф. Усл. печ. л. 13,0.
Тираж 500 экз. Заказ 24.

Издательство Балтийского института экономики и финансов (БИЭФ).
236029, г. Калининград, ул. Горького, 23.